SUITES ET SERIES

1 Généralités sur les suites

1.1 Suites, suites géométriques, suites arithmétiques

Définition 1 *On appelle suite numérique toute application d'une partie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.*
On note u_n l'image de n par la suite u. On note alors (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\in I}$
(où I est l'ensemble des entiers pour lesquels la suite est définie).

1.1.1 Suites arithmétiques

Définition 2 *La suite u est arithmétique si pour tout entier n : $u_{n+1} = u_n + r$ (r réel).*
r s'appelle la raison de la suite.

Propriété 1 *On a les relations suivantes :*
- $\diamond$ $u_n = u_0 + nr$ *ou* $u_n = u_1 + (n-1)r$
- $\diamond$ $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$ *ou* $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$

1.1.2 Suites géométriques

Définition 3 *La suite u est géométrique si pour tout entier n : $u_{n+1} = qu_n$ (q réel).*
q s'appelle la raison de la suite.

Propriété 2 *On a les relations suivantes :*
- $\diamond$ $u_n = u_0\ q^n$ *ou* $u_n = u_1\ q^{n-1}$
- $\diamond$ $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ *ou* $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_1\ \frac{1-q^n}{1-q}$ ($q \neq 1$).

1.2 Variations d'une suite

Définition 4 *Suites croissantes et décroissantes :*
- $\diamond$ *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si pour tout entier n : $u_{n+1} \geq u_n$.*
- $\diamond$ *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si pour tout entier n : $u_{n+1} \leq u_n$.*
- $\diamond$ *Une suite croissante ou décroissante est dite monotone.*

1.3 Suites équivalentes

Définition 5 *Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites équivalentes si :* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Propriété 3 *Si u_n s'exprime par une fraction rationnelle de la variable n, alors (u_n) est équivalente au rapport de ses termes de plus haut degré.*

2 Suites convergentes

2.1 Suites de référence convergeant vers 0

On admettra que les suites ont le même comportement que les fonctions de référence qui leur correspondent :

Propriété 4 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$; $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$; $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b^n} = 0$ *avec* $b > 1$.

2.2 Convergence d'une suite vers un réel l

Définition 6 *On dit qu'une suite* (u_n) *converge vers* l *s'il existe un réel* λ *et une suite de référence* (α_n) *convergeant vers O tels que à partir d'un certain rang on ait* $|u_n - l| \leq \lambda\alpha_n$.

On écrit alors $\lim_{n\to\infty} u_n = l$. *(La limite est unique)*

Définition 7 *Une suite qui ne converge pas est dite divergente.*

Propriété 5 *Si* (u_n) *et* (v_n) *sont deux suites telles qu'à partir d'un certain rang on ait* $u_n \leq v_n$, *si ces deux suites ont pour limites respectives* l *et* l' *alors* $l \leq l'$.

Propriété 6 *Si* $\lim_{n\to\infty} u_n = l$ *et* $\lim_{n\to\infty} v_n = l'$ *alors*

- ◇ $\lim_{n\to\infty} (u_n + v_n) = l + l'$
- ◇ $\lim_{n\to\infty} u_n v_n = ll'$
- ◇ $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{l}{l'}$ $(l' \neq 0)$

Propriété 7 *Si* $u_n = f(n)$ *et si* $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$, *alors* $\lim_{n\to\infty} u_n = l$.

2.3 Cas des suites monotones

Définition 8 *Suites majorée, minorée, bornée.*

- ◇ *On dit qu'une suite* (u_n) *est majorée s'il existe un réel* A *tel que pour tout entier* n *on ait* $u_n \leq A$.
- ◇ *On dit qu'une suite* (u_n) *est minorée s'il existe un réel* A *tel que pour tout entier* n *on ait* $u_n \geq A$.
- ◇ *On dit qu'une suite* (u_n) *est bornée si elle est à la fois minorée et majorée.*

Théorème 1 *Théorème de convergence des suites monotones.*

- ◇ *Toute suite croissante et majorée converge.*
- ◇ *Toute suite décroissante et minorée converge.*

2.4 Cas des suites adjacentes

Définition 9 *Soient* (u_n) *et* (v_n) *deux suites de réels.*

On dit que les suites (u_n) *et* (v_n) *sont adjacentes lorsque :*

- (u_n) *est croissante.*
- (v_n) *est décroissante.*
- $\lim_{n\to\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Théorème 2 *Théorème des suites adjacentes.*

Si (u_n) *et* (v_n) *sont deux suites adjacentes, alors elles convergent vers une même limite* l.

3 Séries numériques

3.1 Définitions

On considère la suite (u_n) et la suite (s_n) définie par $s_n = \sum_{p=0}^{n} u_p$
$(s_0 = u_0,\ s_1 = u_0 + u_1$ et $s_n = u_o + u_1 + \ldots + u_n = s_{n-1} + u_n)$.

Pour distinguer l'étude de la suite (s_n) de celle de (u_n), on dit, lorsqu'on étudie (s_n) que l'on étudie la série de terme général u_n.

Définition 10 *On dit que* $s_n = \sum_{p=0}^{n} u_n$ *est la somme partielle de la série* $\sum u_n$.

On dit que la série $\sum u_n$ *converge lorsque la suite* (s_n) *converge.*

Dans ce cas $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n} u_p$ *est notée* $\sum_{p=0}^{\infty} u_p$ *et est appelée somme de la série.*

Définition 11 *Si* $\lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n} u_p$ *est un réel* S *on dit que la série de terme général* u_n *converge vers* S.

Propriété 8 *Si* $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ *, la série* $\sum u_n$ *diverge.*

3.2 Séries de références

3.2.1 Séries géométriques

On appelle série géométrique toute série dont le terme général est b^n où b est un réel.

Propriété 9 *La série géométrique de terme général* b^n *converge ssi* $|b| < 1$.
La somme de cette série est alors $\frac{1}{1-b}$.

3.2.2 Séries de Riemann

On appelle série de riemann toute série dont le terme général est de la forme $\frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

Théorème 3 *(admis)*
- ◇ *Si* $\alpha > 1$, *la série de Riemann de terme général* $\frac{1}{n^\alpha}$ *converge.*
- ◇ *Si* $\alpha \leq 1$, *la série de Riemann de terme général* $\frac{1}{n^\alpha}$ *diverge.*

3.3 Théorèmes de convergence des séries à termes positifs

3.3.1 Ordre

Théorème 4 *Si* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont deux séries dont tous les termes sont positifs à partir d'un certain rang et si à partir d'un certain rang* $u_n \leq v_n$, *alors la convergence de* $\sum v_n$ *entraîne celle de* $\sum u_n$ *; la divergence de* $\sum u_n$ *entraîne celle de* $\sum v_n$.

3.3.2 Séries à termes équivalents

Théorème 5 *Si* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont deux séries à termes positifs à partir d'un certain rang et si* $u_n \underset{\infty}{\sim} v_n$ *alors les deux séries ont le même comportement.*

3.3.3 Règle de d'Alembert

Théorème 6 *dit Règle de d'Alembert.*

Soit $\sum u_n$ *une série à termes positifs, si* $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$
- *si* $l < 1$ *alors la série converge.*
- *si* $l > 1$ *alors la série diverge.*

3.4 Cas des séries alternées

Définition 12 *On appelle série alternée une série dont le terme général peut s'écrire* $(-1)^n v_n$ *ou* $(-1)^{n+1} v_n$ *où* v_n *est une suite à termes positifs.*

Théorème 7 *Si* $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$ *et si la suite* (v_n) *est décroissante, alors la série* $\sum(-1)^n v_n$ *(ou* $\sum(-1)^{n+1} v_n$*) est convergente.*

3.5 Séries absolument convergente

Définition 13 *Une série* $\sum u_n$ *est dite absolument convergente si la série* $\sum |u_n|$ *converge.*

Théorème 8 *Une série absolument convergente est convergente.*