PLANCHE 1 : dérivabilité

Exercice 1 : Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes au point considéré :

a. $f(x) = \sqrt{x}$ en 0 b. $g(x) = |x+2|$ en -2 c. $h(x) = \sqrt{-x^2+3x+4}$ en -1
d. $i(x) = \sqrt{x^3+2x^2}$ en 0 e. $j(x) = x|x|$ en 0 f. $k(x) = \sin\frac{1}{x}$ en 0

Exercice 2 : Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes, préciser pour chacune l'ensemble de dérivabilité.

a. $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ b. $g(x) = \sin x + \tan x$ c. $h(x) = (x+3)\sqrt{x}$
d. $i(x) = (x^2+2x+2)^3$ e. $j(x) = \sqrt{x^2-x-6}$ f. $k(x) = |x^2-1|$
g. $l(x) = \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ h. $m(x) = (x-1)\sqrt{2x+1}$ i. $n(x) = x\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}$

Exercice 3 : Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$ b. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$ c. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}}$
d. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{x}$ e. $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x-\pi}$ f. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2}$

Exercice 4 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^4+2x^3$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'abscisses respectives 0 et 1.
2. Démontrer que $\mathcal{C}$ traverse sa tangente en chacun de ces deux points.

Exercice 5 : Étudier et représenter graphiquement la fonction f définie par :

$$f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$$

On précisera notamment la dérivabilité de f en -1 et 1.

Exercice 6 : Soit f une fonction dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

On sait que $f(x)$ est de la forme $ax + b + \dfrac{c}{x+1}$, déterminer les réels a, b et c.

Exercice 7 : Soit φ la fonction définie par :

$$\varphi(x) = \frac{x^2+ax+b}{x^2-2x+2}$$

Déterminer les réels a et b pour que la courbe représentative de φ passe par le point A de coordonnées $(2\,;0)$ et admette au point d'abscisse 1 une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -2x$.

Exercice 8 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x(1+x)^n$$

où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

1. Exprimer $f(x)$ comme somme de monômes à l'aide de la formule du binôme.
2. Calculer f' sous les deux formes différentes.
3. En déduire la relation :

$$1 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \cdots + (n+1)C_n^n = 2^{n-1}(n+2)$$