LEÇON 1

COMPLEXES
Parte oane

Résumé Les nombres complexes portent bien leur nom ! Ils interviennent partout : en algèbre, en analyse, en géométrie, en électronique, en traitement du signal, en musique, etc. Et en plus, ils n'ont jamais la même apparence : tantôt sous forme algébrique, tantôt sous forme trigonométrique, tantôt sous forme exponentielle, ... Leur succès vient en fait de deux propriétés : en travaillant sur les nombres complexes, tout polynôme admet un nombre de racines égal à son degré et surtout ils permettent de calculer facilement en dimension 2. Ce n'est pas clair ? Alors détaillons !

I Approche historique

a. Combien l'équation $\mathbf{x^3+px+q=0}$ a-t-elle de solutions dans $\mathbb{R}$?

Historiquement, c'est en essayant de résoudre cette équation que les mathématiciens italiens du XVI$^{\text{ème}}$ siècle eurent pour la première fois l'idée d'utiliser des nombres dont le carré est négatif. Nous qui vivons au XXI$^{\text{ème}}$, nous avons des outils pour dénombrer les solutions.
Considérons donc la fonction $f\ :\ x\mapsto x^3+px+q$ avec p et q des entiers. En étudiant cette fonction, nous allons vérifier qu'elle admet toujours au moins une solution réelle et même déterminer le nombre de solutions selon les valeurs de p et q.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$ et que f est continue sur $\mathbb{R}$, le Théorème des Valeurs Intermédiaires assure l'existence d'une valeur d'annulation de f car elle change de signe [a]

Maintenant, calculons la dérivée de f : $f'(x)=$ .... Quel est son signe ? Distinguons deux cas :

- $\mathbf{p\geqslant 0}$: alors la dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$, donc f ne s'annule qu'une fois.
- $\mathbf{p<0}$: alors la dérivée s'annule en deux valeurs opposées . que nous appellerons a et $-a$. On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-a$		a		$+\infty$
Signe $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-a)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

Maintenant, il faudrait connaître les signes respectifs de $f(-a)$ et $f(a)$ pour savoir si f s'annule sur les intervalles $]-\infty,a]$, $[-a,a]$ et $[a,+\infty[$.
On montre que $f(a)=q-2a^3$ et $f(-a)=q+2a^3$ en utilisant le fait que $f(a)=0$. (Faites-le !)

---
a. comme nous le verrons dans un prochain chapitre...

Alors $f(a) \cdot f(-a) =$
On peut enfin remarquer que $f(a) < f(-a)$ car
Entamons donc la discussion

- Si $f(a)$ et $f(-a)$ sont tous deux de même signe, c'est à dire si $f(a) \cdot f(-a) > 0$ soit encore si $4p^3 + 27q^2 > 0$ alors f ne s'annule qu'une seule fois.

- Si

- Si

b. Résolvons ces équations

Plaçons-nous maintenant dans le cas $4p^3 + 27q^2 > 0$. Nous savons qu'alors l'équation admet une unique solution réelle. Giralomo Cardano a établi [b] en 1547 que cette solution est

$$\sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Utilisez cette formule pour trouver une solution de $(\mathrm{E}_1)\ :\ x^3 - 36x - 91 = 0$

On voudrait faire de même avec $(\mathrm{E}_2)\ :\ x^3 - 15x - 4 = 0$. Un problème apparaît...

Admettons qu'on puisse prolonger les calculs usuels aux racines carrées de nombres négatifs en utilisant le « symbole » $\sqrt{-1}$ et utilisons quand même la formule de notre ami italien.

b. Vous pouvez essayer de le prouver en posant $x = u + v$ et en résolvant un système d'équations d'inconnues u et v

Bon, on ne semble pas très avancé. Alors un petit coup de pouce : calculez $\left(2+\sqrt{-1}\right)^3$ et $\left(2-\sqrt{-1}\right)^3$

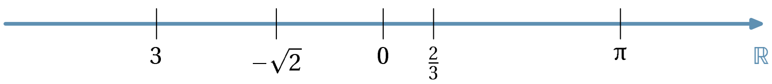
On trouve alors une solution réelle α de (E_2). Or $4p^3+27q^2$ est négatif, donc on devrait trouver deux autres racines réelles. Comme on en a une, cela veut dire qu'on peut factoriser $x^3-15x-4$ par $x-\alpha$: faites-le !

Déduisez-en les deux autres solutions réelles.

Ainsi, à partir de ces travaux, les mathématiciens ont eu l'idée de prolonger les calculs algébriques aux expressions comportant des racines carrées négatives. Il faudra attendre le XIX$^{\text{ème}}$ siècle pour que ces nombres « qui ne faisaient que passer » aient droit de cité et soient étudiés rigoureusement. Il faudra attendre la même époque pour que le héros romantique Evariste Galois propose une étude théorique des équations de degré supérieur à 2, mais ceci est une autre histoire...

II Approche « moderne »

Mathémator : Vous savez « compter en dimension 1 », c'est à dire additionner et multiplier des nombres réels qu'on peut représenter sur la droite des réels :



Faute d'outils plus rigoureux[c], on vous a présenté en classe de seconde l'ensemble des nombres réels comme étant l'ensemble des abscisses des points de la droite orientée ci-dessus.
Vous utilisez depuis l'école primaire ces nombres et les opérations usuelles qui leur sont associées, addition et multiplication, sans trop vous poser de questions. Rappelons quelques propriétés[d] :

- ▷ L'addition possède un élément neutre noté 0 : $x+0=0+x=x$.
- ▷ La somme de 2 réels est encore un réel.
- ▷ Chaque réel x admet un opposé $-x$ vérifiant $x+(-x)=(-x)+x=0$.
- ▷ La multiplication possède un élément neutre noté 1 : $x\times 1=1\times x=x$
- ▷ Le produit de deux réels est encore un réel.
- ▷ Chaque réel différent de 0 admet un inverse x^{-1} vérifiant $x\times x^{-1}=x^{-1}\times x=1$
- ▷ La multiplication est distributive sur l'addition : $x\times(y+z)=x\times y+x\times z$.

c. Vous les verrez peut-être un jour...Il y a plusieurs manières de construire l'ensemble $\mathbb{R}$. Presque toutes définissent un nombre réel comme étant la limite d'une suite d'approximations par des rationnels.

d. Ces propriétés donnent à $\mathbb{R}$ une structure de *corps* : au temps préhistorique des mes années de collège, cette notion algébrique de corps était vue en 4$^{\text{ème}}$ et maintenant en math sup. On comprend pourquoi tant de vos parents ont été effrayés par les mathématiques...

Tout ceci est bien naturel. Maintenant, on voudrait décoler de l'axe des réels et faire le même travail en dimension 2, c'est-à-dire pouvoir calculer avec des couples de nombres du style (x, y).

Téhessin : Ça veut dire qu'on travaille maintenant sur le plan tout entier ?

Mathémator : C'est ça. On note $\mathbb{R}^2$ cet ensemble : l'ensemble des coordonnées des points du plan ! Est-ce qu'on peut définir une addition et une multiplication qui engloberaient et généraliseraient celles vues dans $\mathbb{R}$?

Téhessin : Ben pour l'addition, on fait $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$.

Mathémator : Pourquoi pas ! Vérifions que les propriétés de l'addition sont vérifiées.

Téhessin : On a un élément neutre : $(0,0)$ car $(x, y) + (0,0) =$............................ .

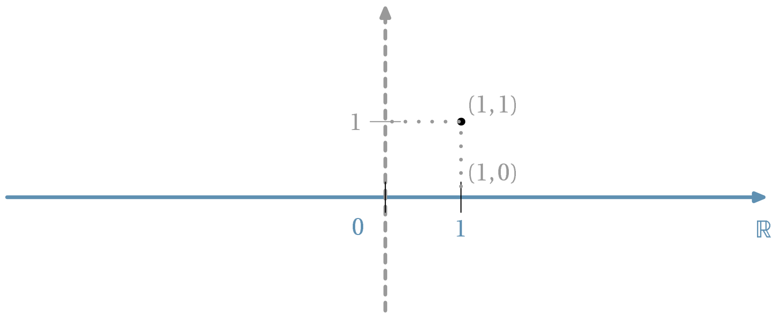
Mathémator : Et surtout l'élément neutre de $\mathbb{R}^2$ se situe « au même endroit » que celui de $\mathbb{R}$: on l'a juste « gonflé » d'un deuxième zéro pour être reconnu dans $\mathbb{R}^2$.

Téhessin : Et pour le symétrique, on prend ... car $(x, y) + \ldots = \ldots$ l'élément neutre.

Mathémator : En effet. Et pour la multiplication ?

Téhessin : Ça doit être pareil : $(x, y) \times (x', y') = (xx', yy')$ avec $(1, 1)$ comme élément neutre.

Mathémator : Pourquoi pas, mais dans ce cas, l'élément neutre de la multiplication dans $\mathbb{R}^2$ ne serait pas « au même endroit » que celui de $\mathbb{R}$



On voudrait plutôt un élément neutre $(1,0)$ et donc que $(x, y) \times (1,0) = (x, y)$. Je vous propose la multiplication suivante

$$(x, y) \times (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$$

Téhessin : Fichtre ! Essayons : $(x, y) \times (1,0) =$ .. . Ça marche.

Mathémator : Je vous laisse vérifier que cette multiplication est distributive sur l'addition et que tout élément (x, y) de $\mathbb{R}^2$ différent de $(0,0)$ admet un inverse $\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, -\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$.

Téhessin : Je suis impressionné par ce petit exposé, mais je ne vois pas trop le lien avec le $\sqrt{-1}$ du paragraphe précédent.

Mathémator : Et bien observez $(0, 1)$ et élevez-le au carré.

Téhessin : Allons-y : $(0, 1) \times (0, 1) =$ .... , bon et alors ?

Mathémator : Alors $(-1, 0)$, c'est le réel -1 « gonflé ». Donc $\sqrt{-1}$ a un « représentant » dans $\mathbb{R}^2$. Dans le plan, il correspond au point de coordonnées $(0, 1)$. Et donc nous allons pouvoir calculer avec ce fameux nombre $\sqrt{-1}$ assez naturellemnt en utilisant les opérations décrites précédemment.

Téhessin : Naturellement, c'est beaucoup dire ! C'est un peu compliqué comme multiplication.

Mathémator : Je vous l'accorde. C'est pourquoi nous allons adopter une autre tactique. À chaque élément (x, y) de $\mathbb{R}^2$ nous allons faire correspondre un nombre qu'on qualifiera de *complexe*.
L'idée vient de l'observation *intuitive*[e] : « $(x, y) \curvearrowright x \cdot (1,0) + y \cdot (0,1) \curvearrowright x \times 1 + y \times \sqrt{-1} \curvearrowright x + y\sqrt{-1}$ »
Nous allons même donner un nom à ce $\sqrt{-1}$: appelons-le i pour qu'il fasse moins peur. Ainsi nous avons les correspondances

Le point M	$\longleftrightarrow$	Le couple (x, y)	$\longleftrightarrow$	Le nombre complexe $x + iy$
$\updownarrow$		$\updownarrow$		$\updownarrow$
Le plan $\mathscr{P}$	$\longleftrightarrow$	$\mathbb{R}^2$	$\longleftrightarrow$	L'ensemble des nombres complexes

e. Les $\curvearrowright$ renvoient à une notion extrêmement importante et rigoureuse : la notion d'*isomorphisme*. Deux ensembles sont isomorphes lorsqu'il existe une bijection entre les deux et que cette bijection « conserve » les opérations. Cela permet de travailler *à isomorphisme près* sur un ensemble compliqué en le remplaçant par un ensemble isomorphe plus approprié à la situation. C'est ce qui se passe entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$

Pour se simplifier la vie, nous allons donner un nom à cet ensemble des nombres complexes : $\mathbb{C}$.. Et maintenant observez comme les calculs deviennent faciles en prologeant les règles valables sur $\mathbb{R}$!

Téhessin : Si vous le dites : $(x+iy)+(x'+iy') = x+iy+x'+iy' = (x+x')+i(y+y')$

Mathémator : Comme nous avions $(x,y)+(x',y') = (x+x',y+y')$, mais en plus simple.

Téhessin : Et $(x+iy)\cdot(x'+iy') = xx'+ixy'+iyx'+i^2yy'$

Mathémator : N'oubliez pas que $i^2 = -1$

Téhessin : Alors $(x+iy)\cdot(x'+iy') = (xx'-yy')+i(xy'+yx')$

Mathémator : Comme nous avions $(x,y)\times(x',y') = (xx'-yy', xy'+yx')$.
Donc nous allons pouvoir calculer en dimension 2 en généralisant les règles de dimension 1. Nous avons juste ajouté ce nombre i de carré -1. En particulier, tous les nombres réels sont des nombres complexes : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
Nous allons pouvoir associer à chacun de ces nombres réels un point du plan et donc associer des transformations du plan à des calculs dans $\mathbb{C}$: on va résoudre des problèmes de géométrie par le calcul.

Si vous avez compris ces relations, tout ce qui va suivre va vous paraître « trop » simple....

III Vocabulaire et premières propriétés

Théorème 1 : Ensemble $\mathbb{C}$

On définit un ensemble $\mathbb{C}$

- ▷ muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$
- ▷ contenant un nombre i vérifiant $i^2 = -1$
- ▷ tel que chaque élément z de $\mathbb{C}$ peut s'écrire de manière **unique** sous la forme

$$z = a + ib \quad \text{avec } a \text{ et } b \text{ des nombres réels}$$

a. Forme algébrique

Cette écriture unique est appelée **forme algébrique** du réel z.
Le nombre a est appellé **partie réelle** de z et notée $\mathscr{R}e(z)$
Le nombre b est appellé **partie imaginaire** de z et notée $\mathscr{I}m(z)$

Attention !

$\mathscr{I}m(z)$ est ....

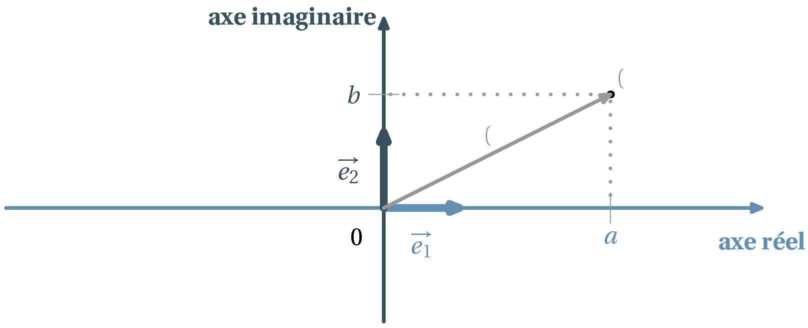
À quoi sert l'unicité de la forme algébrique ?

Par exemple, après maints calculs savants, vous arrivez au résultat $2x+3y-5+i(7x-32y+1) = 0$ avec x et y des réels. Et bien le membre de gauche est une forme algébrique puisque de la forme réel + i·réel. Or la forme algébrique de 0 est $0+i\cdot 0$.
Ainsi, une équation complexe revient à deux équations réelles (bienvenue dans la deuxième dimension...) et donc

....

b. Le plan complexe

Nous avons vu que chaque nombre complexe peut être associé à un point du plan qu'on munit d'un repère $\left(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$



À tout nombre complexe $z = a + ib$ on associe le point M de coordonnées (a, b) qu'on appelle **image** de complexe $z = a + ib$. On le note souvent M(z).

Inversement, à tout point M du plan de coordonnées (a, b), on associe son **affixe** $z = a + ib$ qu'on note souvent z_M.

Enfin, à tout vecteur $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2}$ de coordonnées (a, b) dans la base $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$ est associé une affixe $z_{\overrightarrow{u}} = a + ib$

c. Premiers calculs géométriques

▷ Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives (a, b) et (a', b'), alors $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (a + a')\overrightarrow{e_1} + (b + b')\overrightarrow{e_2}$, donc

Propriété 1 : affixe d'une somme

$$z_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}} =$$

▷ De même, si λ est un nombre réel

Propriété 2 : affixe du produit par un réel

$$z_{\lambda\overrightarrow{u}} =$$

▷ Alors, si I est le **milieu** du segment $[A, B]$, on a

Propriété 3 : affixe du milieu

$$z_I =$$

▷ Pour tous points A et B

Propriété 4 : affixe d'un vecteur

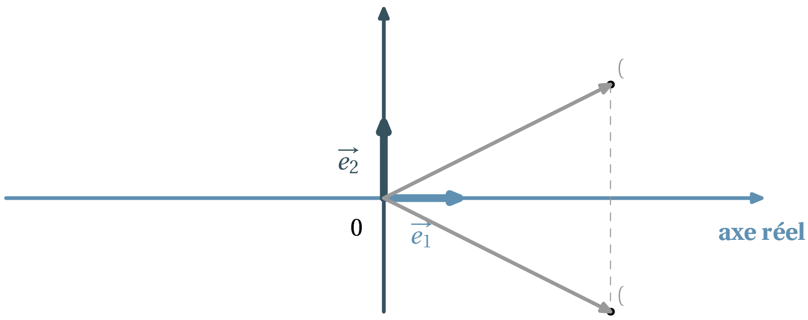
$$z_{\overrightarrow{AB}} =$$

d. Conjugué d'un complexe

Définition 1 : Conjugué

On appelle conjugué du nombre complexe $z = a + ib$ le nombre

Géométriquement cela donne



Je vous laisse prouver les propriétés immédiates suivantes :

Propriété 5 :

- ▷ $M(z)$ et $M'(\overline{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{e_1})$
- ▷ $\overline{z_1 + z_2} =$ ....
- ▷ $\overline{z_1 z_2} =$ ....
- ▷ $\overline{\overline{z}} =$ ....
- ▷ $z \in \mathbb{R} \iff z =$ ....
- ▷ $z \in i\mathbb{R} \iff z =$ ....
- ▷ $\mathscr{R}e(z) =$ ....
- ▷ $\mathscr{I}m(z) =$ ....
- ▷ Si $z = a + ib$, alors $z\overline{z} =$ ....

e. À quoi servent les conjugués ?

À montrer qu'un complexe est un réel

En effet, si on arrive à montrer que $\overline{z} = z$, alors on en conclut que z est réel. **Pourquoi ?**

À rendre réel des dénominateurs pour obtenir des formes algébriques

En effet,

$$z \cdot \overline{z} = (a + ib)(a - ib) =$$

Exemple 1 :

Ainsi, pour obtenir la forme algébrique de l'inverse de $2 + i$:

$\dfrac{1}{2+i} =$ ....

f. Conjugué de l'inverse

Sachant qu'un complexe non nul z admet une forme algébrique $a+ib$, on sait maintenant trouver la forme algébrique de son inverse :

et donc $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} =$

g. Module d'un nombre complexe

Définition 2 : Module

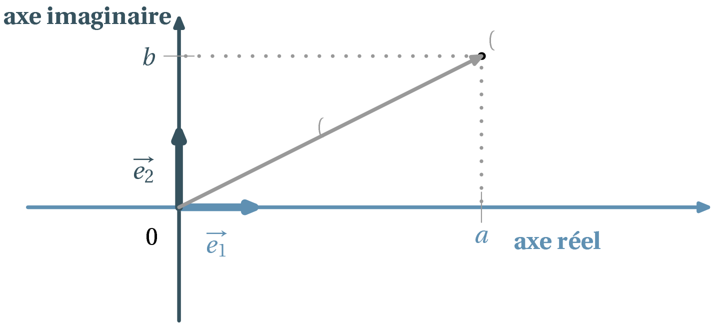
Le module du complexe z est le réel positif noté $|z|$ tel que

$$|z| = \sqrt{z\,\overline{z}}$$

Remarque 1 :

- ▷ Cette définition en est bien une car $z\,\overline{z} = a^2+b^2$ d'après notre étude sur les conjugués.
- ▷ Si a est un réel, $|a| = \sqrt{a\,\overline{a}} =$ car $\overline{a} = a$. Donc le module de a est bien la valeur absolue de a et notre notation est cohérente.
  La notion de module dans $\mathbb{C}$ généralise donc celle de valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

Interprétation géométrique



Nous venons de voir que, si $z = a+ib$, alors

Propriété 6 :

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Or, qu'est-ce que $\sqrt{a^2+b^2}$ si ce n'est la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$ ou encore la longueur OM.

Propriété 7 :

$$|z_{\mathrm{M}}| = \|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\| = \mathrm{OM} \qquad \left|z_{\vec{u}}\right| = \|\vec{u}\|$$

Propriétés des modules

Je vous laisse prouver les propriétés suivantes

Propriété 8 :

- $\left|\overline{z}\right| =$ ....
- $|z| = 0 \Longleftrightarrow$ ....
- $|z_1 \cdot z_2| =$ ....
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| =$
- $\mathscr{R}e(z) \leqslant$ ....
- $\mathscr{I}m(z) \leqslant$ ....

La propriété suivante mérite une petite aide à la démonstration

Propriété 9 : Inégalité triangulaire

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

C'est à dire, pour aller de Nantes à Montaigu, il est plus long de passer par Bratislava que de suivre la RN 137.
Pour les curieux, voici comment cela se démontre.

Comme les deux membres de l'inégalité sont positifs, il suffit donc de comparer les carrés de chaque membre.
Or $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1 + z_2}\right) = (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right) = |z_1|^2 + \left(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2\right) + |z_2|^2$
D'autre part $(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + 2|z_1 z_2| + |z_2|^2$
Il s'agit donc de comparer les « doubles produits ».
Or $z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} = 2\mathscr{R}e(z_1 z_2) \leqslant 2|z_1 z_2|$ d'après une propriété ci-dessus. Donc

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + \left(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2\right) + |z_2|^2 \leqslant |z_1|^2 + 2|z_1 z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$$

IV Résolution d'équations du second degré

a. Racine carrée d'un nombre complexe

L'objet de cette section est de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = \alpha$

Racine carrée d'un nombre réel

On suppose ici que α est un réel.

- $\boldsymbol{\alpha \geqslant 0}$: alors $z^2 = \alpha \Longleftrightarrow z^2 - \alpha =$ .... Les solutions[f] sont donc ....

f. LA solution si $\alpha = 0$

Exemple 2 :

On connaît : $z^2 = 4 \Longleftrightarrow$ .... ou ....

▷ $\boldsymbol{\alpha < 0}$: alors $z^2 = \alpha \Longleftrightarrow (z - i\sqrt{-\alpha})(z + i\sqrt{-\alpha}) = 0$. Les solutions sont donc $\pm i\sqrt{-\alpha}$

Exemple 3 :

C'est la nouveauté : $z^2 = -4 \Longleftrightarrow$ .... ou ....

Racine carrée d'un complexe non réel

Les choses se compliquent ! Nous allons traiter un exemple pour ne pas vous faire (trop) peur.

Exemple 4 :

Cherchons les racines carrées de $4+3i$, à savoir les nombres $a+ib$ tels que $(a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab = 4+3i$.

Par unicité de la forme algébrique on obtient

$$\begin{cases} a^2 - b^2 & = & 4 \\ a^2 + b^2 & = & 5 \\ 2ab & = & 3 \end{cases}$$

Ainsi $a^2 =$........ et $b^2 =$........, donc $a =$................ et $b =$.............., or $2ab = 3$, donc a et b sont ....
....

Les solutions sont donc .... et ....

b. Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b et c des réels

C'est comme en 1$^{\text{ère}}$: $ax^2 + bx + c = 0 \Longleftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0 \Longleftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}$

Tout dépend donc du signe de $b^2 - 4ac$, puis on utilise les résultats de la section précédente.

Théorème 2 : Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b et c des réels

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet toujours des solutions sur $\mathbb{C}$. Notons $\Delta = b^2 - 4ac$ le **discriminant** de l'équation et δ le *complexe* vérifiant $\delta^2 = \Delta$.

▷ Si $\Delta = 0$, il existe une unique solution ....

▷ Si $\Delta > 0$, il existe deux solutions réelles ....

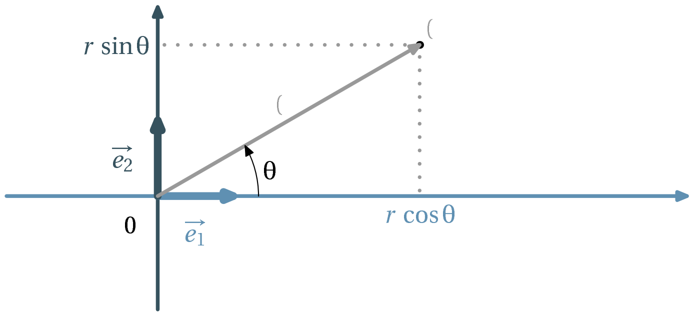
▷ Si $\Delta < 0$, il existe deux solutions complexes conjuguées ....

V FORME TRIGONOMÉTRIQUE

a. Argument d'un complexe non nul

Forme trigonométrique

Vous vous souvenez de la correspondance entre $\mathbb{C}$ et le Plan. Nous avions privilégié les coordonnées cartésiennes d'un point. On aurait pu utiliser tout aussi bien ses **coordonnées polaires**. Le Plan a cette fois besoin d'être orienté (il le sera implicitement à partir de maintenant).



Ainsi, (r,θ) étant le couple de coordonnées polaires de l'image M de z, on a $z = r\cos\theta + i r\sin\theta$ déterminé de manière unique, car c'est en fait une forme algébrique déguisée : on l'appelle **forme trigonométrique** du complexe z.

Définition 3 : forme trigonométrique

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Remarque 2 : notation en électronique

Les électroniciens notent souvent ce résultat sous la forme : $z = [r,\theta]$

Congruence modulo 2π

Vous rencontrerez souvent la notation $x \equiv y[2\pi]$ qui se lit « x est congru à y modulo 2π ». Elle veut simplement dire que $x - y$ est un multiple de 2π, c'est-à-dire qu'il existe un entier relatif k tel que $x - y = k \times 2\pi$.

À retenir (1) : congruence modulo 2π

$$x \equiv y[2\pi] \iff \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = y + 2k\pi$$

Par exemple, vous savez que $\dfrac{\pi}{3} \equiv \dfrac{4\pi}{3}[2\pi]$: dessinez un cercle trigonométrique pour vous en convaincre.

Mesure d'un angle de vecteurs

Nous n'avons pas les moyens de définir « proprement » les angles de vecteurs. Nous n'en avons qu'une définition intuitive. Ce qui nous intéresse, c'est que θ est UNE mesure en radians de l'angle de vecteurs $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM}\right)$. UNE mesure, car elle est définie modulo 2π. Et bien cette mesure sera UN argument du complexe z, qu'on notera $\arg z$. On retiendra :
Par exemple, $\arg 32 \equiv 0[2\pi]$, $\arg 32i \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

Propriété 10 : argument

$$\arg z \equiv \theta [2\pi]$$

Des formes trigonométriques de référence

- $1 = \cos 0 + i \sin 0$ donc . . . .
- $i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ donc . . . .
- $|1+i| = \sqrt{2}$ et $1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ =. . . . . donc . . . .
- $|\sqrt{3}+i| = 2$ et $\sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$ =. . . . . donc . . . .

b. Correspondance forme algébrique / forme trigonométrique

Soit z le complexe de forme algébrique $a + ib$ et de forme trigonométrique $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ alors on a d'une part :

Propriété 11 : forme algébrique connaissant la forme trigonométrique

$a =$ . . . . $b =$ . . . .

et d'autre part $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Si z est *non nul*, son module $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ sera non nul également. Ainsi, nous pouvons écrire z sous la forme

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \mathrm{i}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\ &= r\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \mathrm{i}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\ &= r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)) \end{aligned}$$

Nous en déduisons que :

Propriété 12 : forme trigonométrique en fonction de la forme algébrique

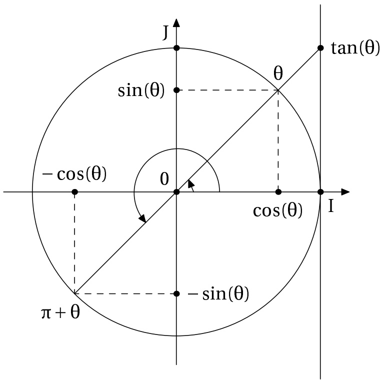
$\cos(\theta) =$ . . . . $\sin(\theta) =$ . . . .

Ainsi, connaissant a et b, on peut obtenir le module et un argument de $a + \mathrm{i}b$. On obtiendra une mesure exacte de θ si $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sont des valeurs connues comme $1/2$, $\sqrt{3}/2$, 1, etc.
Sinon, on obtiendra une valeur approchée à l'aide des touches COS⁻¹ et SIN⁻¹, ou encore avec TAN⁻¹. En effet, $\cos(\theta)$ étant non nul [g],
ce qui déterminera une valeur de l'argument modulo π.

g. Sinon, on sait qui est θ...

Propriété 13 : argument en fonction de la forme algébrique

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$



Il suffira ensuite de considérer le signe de cos(θ) ou de sin(θ) pour savoir à qui on a affaire.

c. Opérations sur les formes trigonométriques

Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'\left(\cos\theta' + i\sin\theta'\right)$, alors

$$zz' = rr'\left[\left(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'\right) + i\left(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'\right)\right]$$

Vous qui connaissez parfaitement vos formules d'addition(b. page 19), vous en déduisez que

$$zz' = z = rr'\left(\cos\left(\theta+\theta'\right) + i\sin\left(\theta+\theta\right)'\right)$$

Ainsi, nous arrivons au résultat capital

Propriété 14 : argument d'un produit

$\arg(zz') = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Cela va VOUS permettre de démontrer les propriétés suivantes avec un peu d'astuce et de patience

Propriété 15 : Propriétés algébriques des arguments

- ▷ $\arg(zz') = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- ▷ $\arg(z^n) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- ▷ $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- ▷ $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- ▷ $\arg(\overline{z}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- ▷ $\arg(-z) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

En particulier, la formule concernant z^n nous permet d'écrire

Théorème 3 : Formule de Moivre

$(\cos\theta + j\sin\theta)^n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Nous nous rendons ainsi compte que :

À retenir (2) :

- ▷ Les formes trigonométriques sont adaptés aux produits de complexes;
- ▷ Les formes algébriques sont adaptées aux sommes de complexes.

Vous serez amenés au hasard d'exercices à résoudre des équations à coefficients complexes, mais on n'attend de vous aucun savoir-faire particulier : vous serez guidés pas à pas.

VI Les objets géométriques et les complexes

a. De l'objet au complexe

Comment caractériser un cercle ?

Le cercle de centre A et de rayon R est l'ensemble des points situés à la distance R de A. Il est facile de traduire simplement cela en langage complexe...

À retenir (3) : caractérisation d'un cercle

$$\mathrm{M}(z) \in \mathscr{C}(\mathrm{A},\mathrm{R}) \iff |z - z_\mathrm{A}| = \mathrm{R}$$

Comment caractériser un triangle isocèle ?

C'est encore une histoire de distance, donc de module : ABC est isocèle de sommet principal A si et seulement si AB = AC donc

À retenir (4) : triangle isocèle

ABC isocèle de sommet principal A $\iff |z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}| = |z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A}| \iff \left|\dfrac{z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}}{z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A}}\right| = 1$

Comment caractériser un triangle rectangle ?

On peut encore parler distance grâce au théorème de Pythagore

$$|z_\mathrm{C} - z_\mathrm{B}|^2 = |z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}|^2 + |z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A}|^2$$

ou angle droit : mais c'est l'angle géométrique qui nous intéresse, donc nous travaillerons modulo π

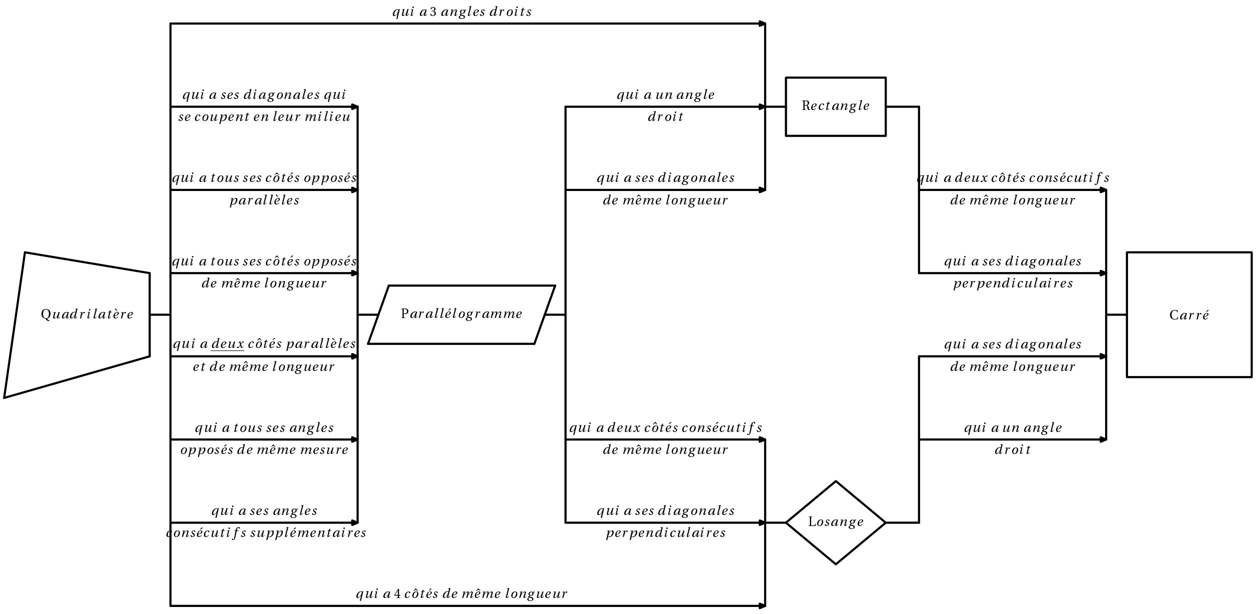
$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{e_1}\right) + \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = -\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) + \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = -\arg\left(z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}\right) + \arg\left(z_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}\right) = \arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}}{z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}}\right) = \arg\left(\dfrac{z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A}}{z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}}\right)$$

À retenir (5) : triangle rectangle

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi] \iff \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$$

Comment caractériser les différents quadrilatères ?

Petite révision de collège...



qu'il vous suffira d'adapter connaissant ce qui précède.

b. Du complexe à l'objet

Que représente $z - 32 + 5i$?

Soit A le point d'affixe $32 - 5i$ et M le point d'affixe z, alors $z - 32 + 5i = z_M - z_A = z_{\overrightarrow{AM}}$

Comment interpréter $|z - 32 + 5i| = 3$?

D'après ce qui précède, on aboutit à AM = 3 : il s'agit donc du cercle de centre A et de rayon 3.

Comment interpréter $|32 + iz| = 5$?

$|32 + iz| = |i(-32i + z)| = |i| \times |z - 32i| = |z - 32i| = \mathrm{BM}$ avec M le point d'affixe z et B le point d'affixe $32i$. On retombe donc sur un cercle.

Comment interpréter $|z - a| = |z - b|$?

Soit M d'affixe z, A d'affixe a et B d'affixe b. Alors l'égalité se traduit par AM = BM, donc M est équidistant de A et B, donc M est sur la médiatrice de [AB].

Que se cache-t-il derrière le quotient $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$?

Il suffit de remarquer que $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}$. Donc vous utiliserez le fait que

- $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$
- $\left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \dfrac{AC}{AB}$

Dans d'autres cas, vous serez confrontés à l'interprétation d'une égalité du style $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \lambda$ qui se traduit par $z_{\overrightarrow{AC}} = \lambda z_{\overrightarrow{AB}}$, donc

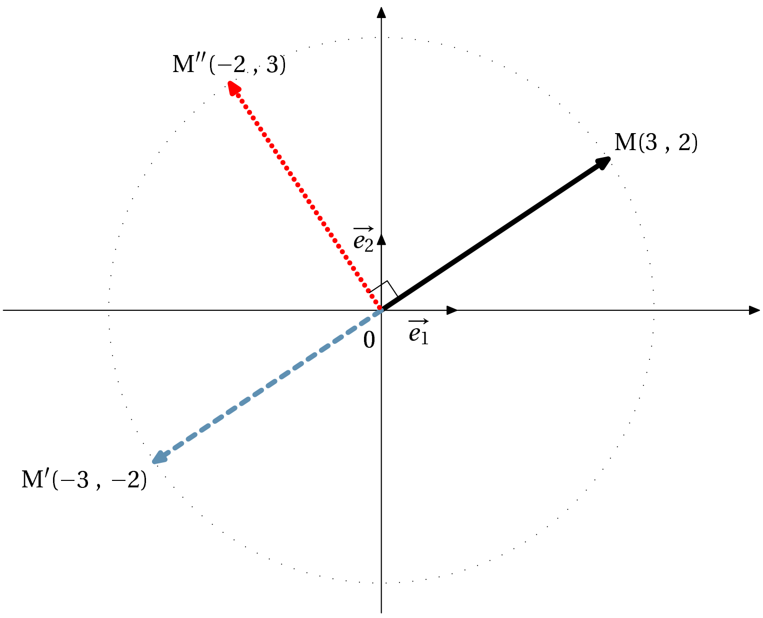
- si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$ et donc A, B et C sont alignés.
- si $\lambda \in i\mathbb{R}$, $z_{\overrightarrow{AC}} = \pm|\lambda| i z_{\overrightarrow{AB}}$ et donc $\arg\left(z_{\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \pm\dfrac{\pi}{2} + \arg\left(z_{\overrightarrow{AC}}\right)$ $[2\pi]$ c'est à dire $(AC)\perp(AB)$
- si $\lambda = \pm i$, alors le triangle ABC est isocèle et rectangle en A

Comment interpréter $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} [\pi]$?

On déduit de cette relation que le triangle AMB est rectangle en M, donc que M décrit le cercle de diamètre [AB] privé des points A et B.

c. En attendant la deuxième partie du cours...

Soit $z = 3 + 2i$, alors $-1 \times z = -3 - 2i$ et $i \times z = 3i + 2i^2 = -2 + 3i$. Notons M, M′ et M″ les points d'**affixes** respectives z, $-z$ et iz

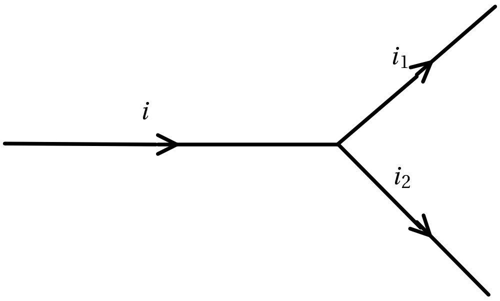


Ô monde merveilleux ! Une multiplication par i se traduit par un quart de tour, une multiplication par -1 se traduit par un demi-tour, deux multiplications successives par i, c'est à dire une multiplication par $i^2 = -1$ se traduit bien par deux quarts de tour, *i.e.* un demi tour. Mais ceci est une autre histoire...

VII Complexes et électronique

a. Somme de deux grandeurs sinusoïdales

On considère la situation suivante :



Le courant initial i et les trois courants résultants i_1 et i_2 ont la même pulsation ω.
Si $i_k = \widehat{\mathrm{I}_k}\sin(\omega t + \varphi)$, alors, en notant I_k la valeur efficace[h] de i_k on a

$$\underline{\mathrm{I}_k} = \mathrm{I}_k\left(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi\right)$$

avec $\widehat{\mathrm{I}_k} = \sqrt{2}\mathrm{I}_k$

En électronique, on note « j » le nombre de carré -1 pour ne pas le confondre avec le « i » de l'intensité...

La *loi des nœuds* nous dit que, à chaque instant t, $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$.
Il est temps à présent de se souvenir d'une petite formule de trigo :

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$$

Vous pouvez alors montrer que, d'une part

$$i_1(t) + i_2(t) = \left(\sqrt{2}\mathrm{I}_1\cos\varphi_1 + \sqrt{2}\mathrm{I}_2\cos\varphi_2\right)\sin(\omega t) + \left(\sqrt{2}\mathrm{I}_1\sin\varphi_1 + \sqrt{2}\mathrm{I}_2\sin\varphi_2\right)\cos(\omega t)$$

et d'autre part

$$i(t) = \left(\sqrt{2}\mathrm{I}\cos\varphi\right)\sin(\omega t) + \left(\sqrt{2}\mathrm{I}\sin\varphi\right)\cos(\omega t)$$

puisque la relation $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$ est vraie à chaque instant, elle est donc vraie en particulier au temps $t = 0$, d'où

$$\sqrt{2}\mathrm{I}\sin\varphi = \sqrt{2}\mathrm{I}_1\sin\varphi_1 + \sqrt{2}\mathrm{I}_2\sin\varphi_2$$

(pourquoi ?) et en $t = \frac{\pi}{2\omega}$ on obtient

$$\sqrt{2}\mathrm{I}\cos\varphi = \sqrt{2}\mathrm{I}_1\cos\varphi_1 + \sqrt{2}\mathrm{I}_2\cos\varphi_2$$

Vous pouvez alors expliquer pourquoi $\underline{\mathrm{I}_0} = \underline{\mathrm{I}_1} + \underline{\mathrm{I}_2}$
dans le cas de signaux de même pulsation. Cela va nous rendre de grands services, car il va être beaucoup plus simple d'additionner des complexes plutôt que des grandeurs sinusoïdales.

Exemple

Considérons $i_1 = 2\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$ et $i_1 = 3\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$
Alors vous obtenez d'une part

$$\underline{\mathrm{I}_1} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{j}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(1+\mathrm{j}\right)$$

et d'autre part

$$\underline{\mathrm{I}_2} = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{j}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{3}{2}\left(\sqrt{3} - \mathrm{j}\right)$$

h. Nous apprendrons à la calculer quand nous aurons étudié le calcul intégral

Nous en déduisons que

$$\underline{I} = \underline{I_1} + \underline{I_2} = \left(\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + j\left(\sqrt{2} - \frac{3}{2}\right)$$

On ne reconnais pas de lignes trigonométriques connues. Nous allons donc utiliser des valeurs approchées.

$$\underline{I} \approx 4,012289774 - 0,08578643763j$$

Nous en déduisons que l'intensité efficace vaut environ 4,01 Ampères et une mesure de son argument -0,021 radians, et donc

$$i(t) \approx 4,01\sqrt{2}\sin(\omega t - 0,021)$$

b. Impédance complexe

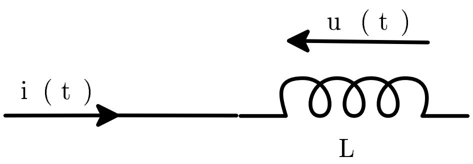
Vous verrez un jour que l'impédance complexe $\underline{Z}$ est définie par

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + jX$$

avec R la resistance et X la réactance du dipôle..

Cas d'une bobine parfaite

On considère la situation suivante :



Par définition de l'intensité $i(t)$, on a $u(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$. Or $i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$, donc

$$\begin{aligned} u(t) =& L\frac{d\left(I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)\right)}{dt} \\ =& LI\sqrt{2}\omega\cos(\omega t + \varphi) \\ =& L\omega I\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{car} \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \end{aligned}$$

Nous en déduisons que, d'une part

$$\begin{aligned} \mathrm{Arg}(\underline{Z}) &= \mathrm{Arg}(\underline{U}) - \mathrm{Arg}(\underline{I}) \\ &= \varphi + \tfrac{\pi}{2} - \varphi \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned} |\underline{Z}| &= \tfrac{|\underline{U}|}{|\underline{I}|} \\ &= \tfrac{IL\omega}{I} \\ &= L\omega \end{aligned}$$

Finalement, on obtient que

$$\underline{Z} = jL\omega$$

car je vous rappelle que $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = j$

Montrez de même que l'impédance complexe d'un condensateur parfait de capacité C vaut $\frac{1}{jc\omega}$ sachant que par définition $i(t) = C\dfrac{du(t)}{dt}$

.

Formulaire de Trigonométrie

▷ **Formules**

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$, pour $a+b \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$, pour $a-b \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k' \in \mathbb{Z}$

▷ **Transformation de produits en somme**

$\cos a \cdot \cos b = \dfrac{1}{2} \cdot (\cos(a+b) + \cos(a-b))$

$\sin a \cdot \sin b = \dfrac{1}{2} \cdot (\cos(a-b) - \cos(a+b))$

$\sin a \cdot \cos b = \dfrac{1}{2} \cdot (\sin(a+b) + \sin(a-b))$

▷ **Transformation de sommes en produits**

$\cos p + \cos q = 2 \cdot \cos(\dfrac{p+q}{2}) \cdot \cos(\dfrac{p-q}{2})$

$\cos p - \cos q = -2 \cdot \sin(\dfrac{p+q}{2}) \cdot \sin(\dfrac{p-q}{2})$

$\sin p + \sin q = 2 \cdot \sin(\dfrac{p+q}{2}) \cdot \cos(\dfrac{p-q}{2})$

$\sin p - \sin q = 2 \cdot \sin(\dfrac{p-q}{2}) \cdot \cos(\dfrac{p+q}{2})$

▷ **Formules de duplication**

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

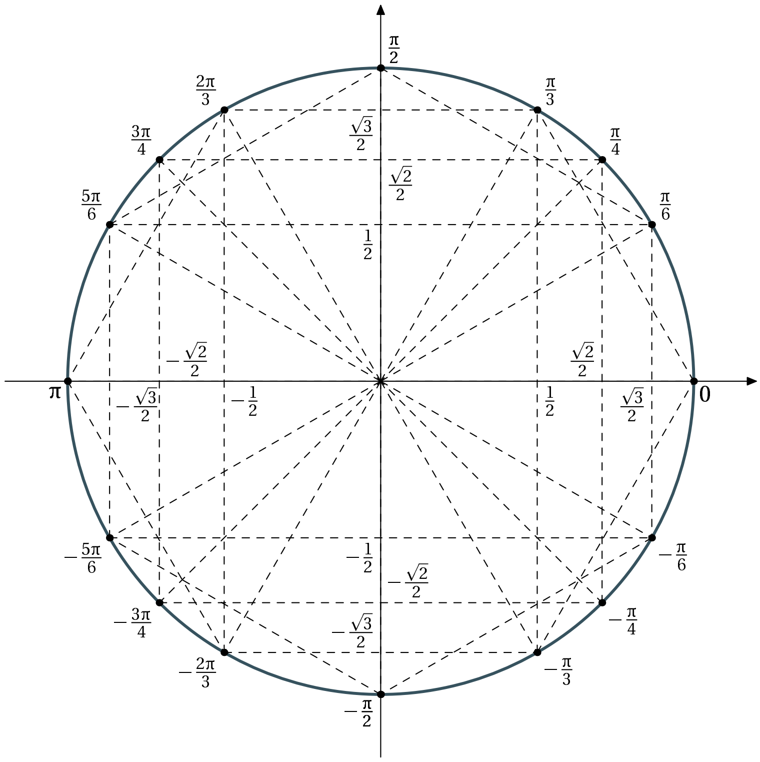
$\sin(2x) = 2 \cos x \sin x$

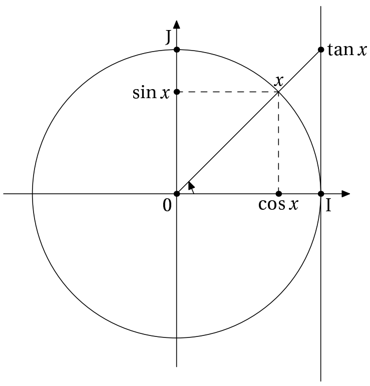
$\tan(2x) = \dfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$, $x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$ pour $k \in \mathbb{Z}$

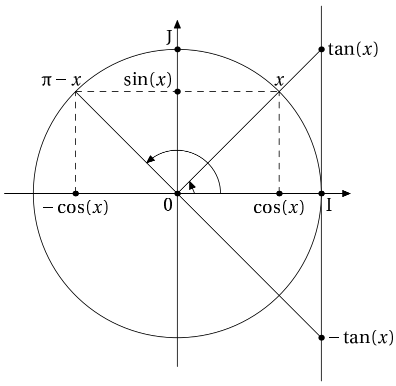
Avec $t = \tan(\dfrac{x}{2})$, on a :

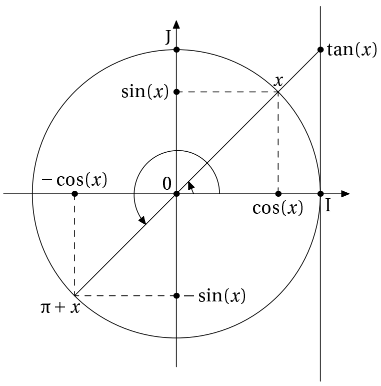
$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$

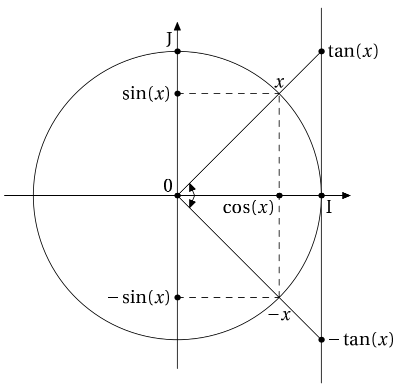
.


$\frac{\pi}{2}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{1}{2}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
π
0
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{5\pi}{6}$
$-\frac{\pi}{6}$
$-\frac{1}{2}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$-\frac{3\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{2\pi}{3}$
$-\frac{\pi}{3}$
$-\frac{\pi}{2}$


J
$\tan x$
x
$\sin x$
0
$\cos x$
I


J
$\tan(x)$
$\pi - x$
$\sin(x)$
x
$-\cos(x)$
0
$\cos(x)$
I
$-\tan(x)$


J
$\tan(x)$
$\sin(x)$
x
$-\cos(x)$
0
$\cos(x)$
I
$-\sin(x)$
$\pi + x$


J
$\tan(x)$
x
$\sin(x)$
0
$\cos(x)$
I
$-\sin(x)$
$-x$
$-\tan(x)$