Exercice 1

Dériver les fonctions suivantes :

$f(x) = x^2$

$g(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 4$

$h(x) = \sqrt{x}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$

$k(x) = \dfrac{x+5}{x^2+1}$

Exercice 2

Dériver les fonctions suivantes :

$f(x) = 4x^2 - 3x + 1$

$g(x) = (2x+3)(3x-7)$

$h(x) = \dfrac{2x+4}{3x-1}$ pour $x \neq \dfrac{1}{3}$

$k(x) = (2x^2 + 3x + 1)^2$

Exercice 3

On considère la fonction définie par $f(x) = x^2 - x - 1$. On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative.
On considère également la fonction g définie par $g(x) = 3 - x$. On note (D) sa représentation graphique.

1) Calculer la dérivée f' de f.

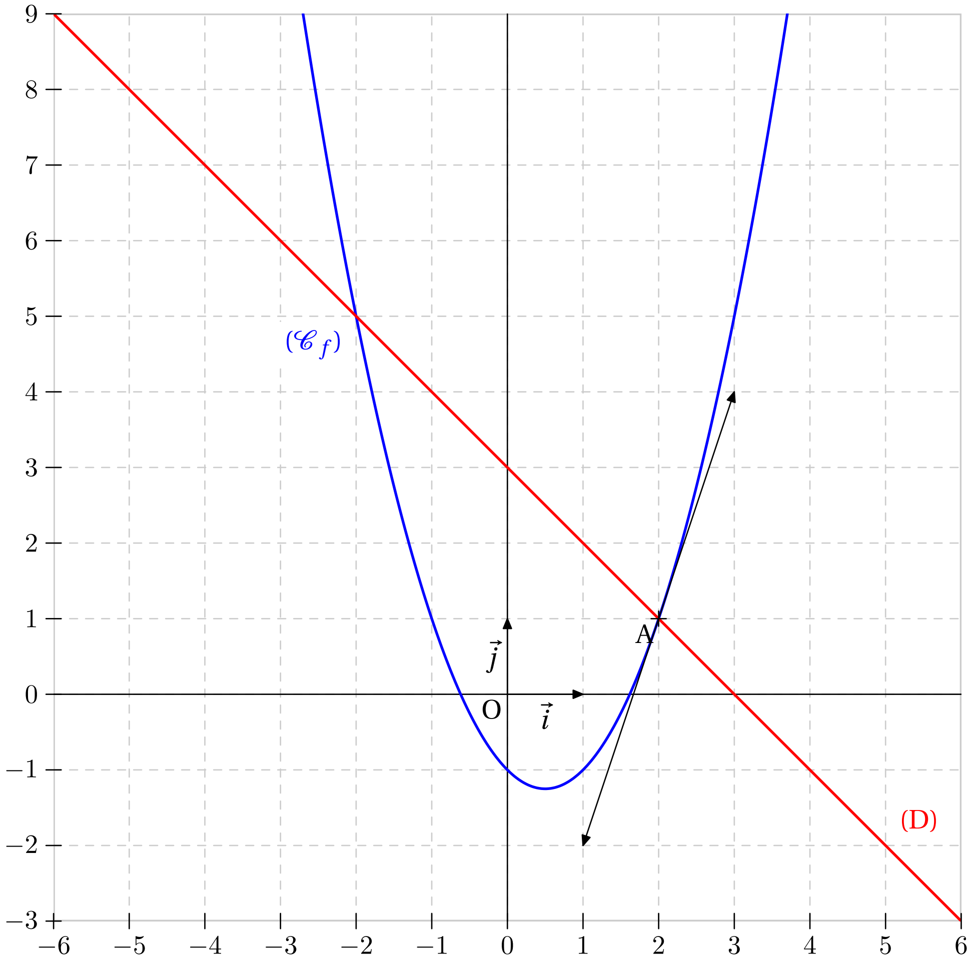
2) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse $x_0 = 2$.

3) Résoudre par le calcul l'équation $g(x) = f(x)$.

4) Préciser les coordonnées des points d'intersections de $(\mathcal{C}_f)$ et (D).

5) Tracer sur un même repère les droites (T), (D) et la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

Illustration



Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$.
On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative.

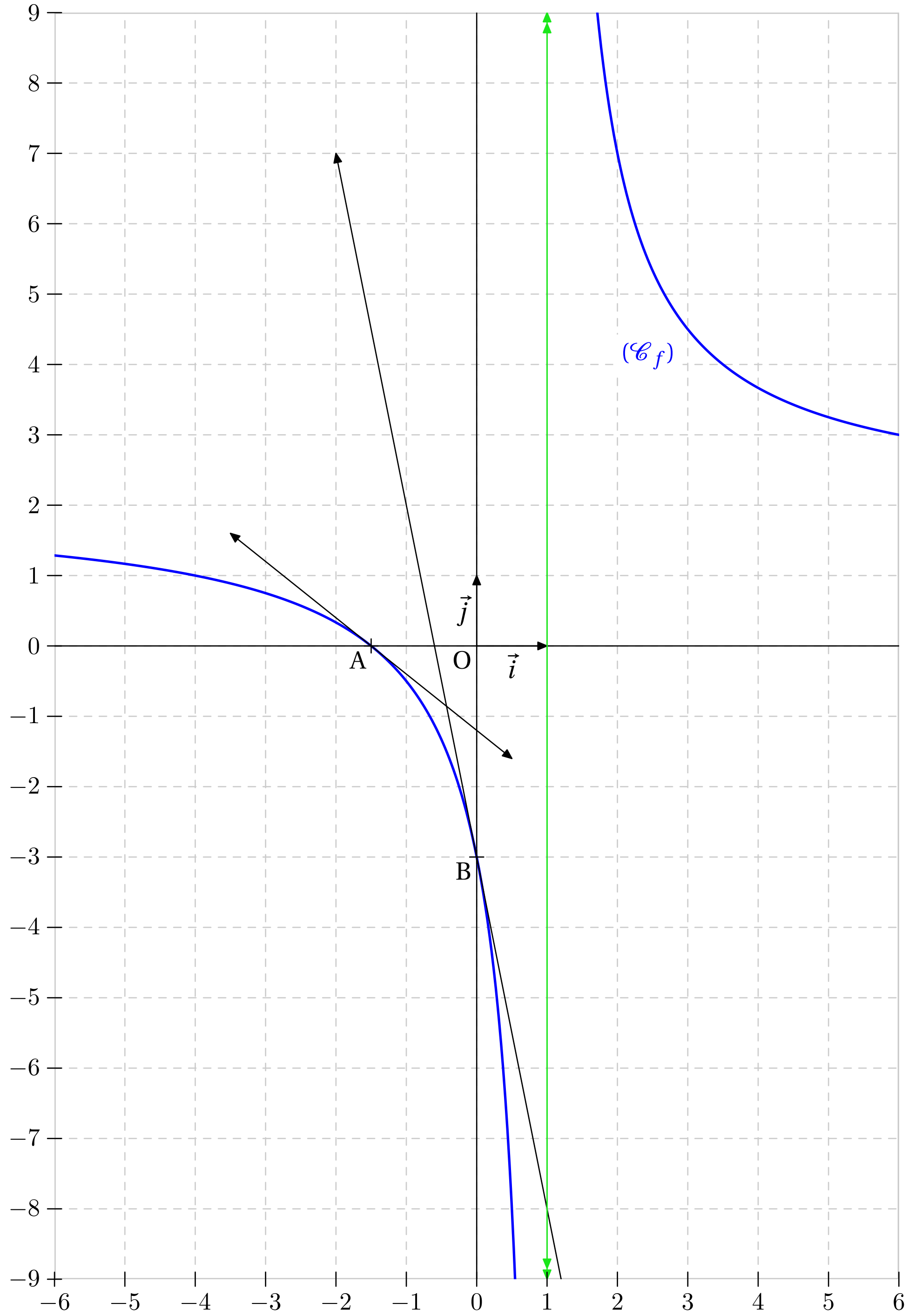
1) Calculer la dérivée f' de f.

2) Soit A le point d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des abscisses.
Calculer les coordonnées de A, puis une équation de la tangente (T_A) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point A.

3) Soit B le point d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des ordonnées.
Calculer les coordonnées de B, puis une équation de la tangente (T_B) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point B.

4) Tracer sur un même repère (T_A), (T_B) et $(\mathcal{C}_f)$.

Illustration



Exercice 5

On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

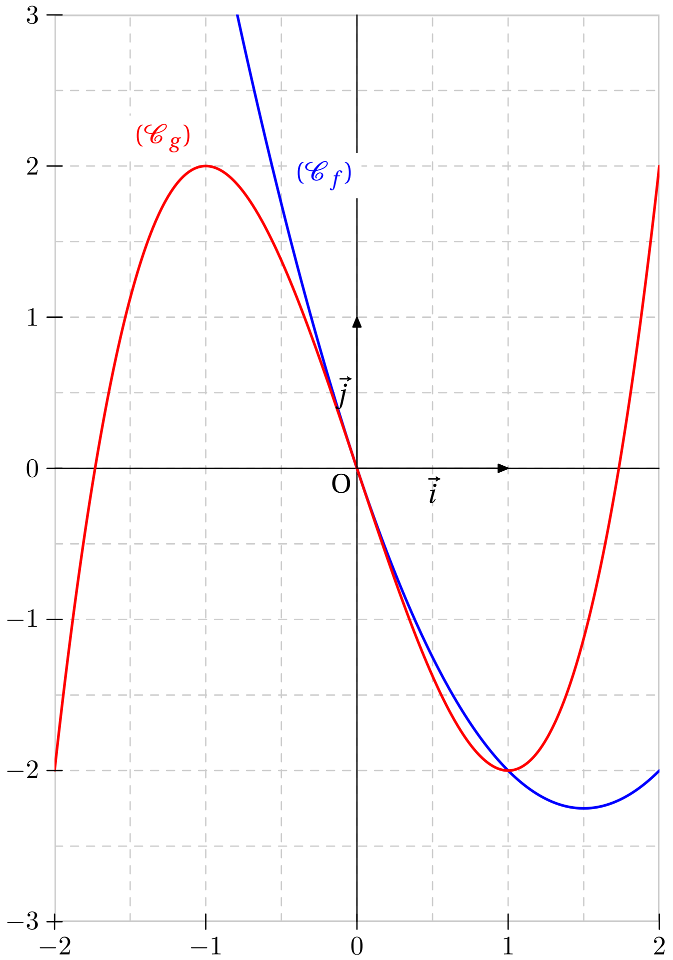
$$f(x) = x^2 - 3x \qquad g(x) = x^3 - 3x$$

1) Etude de f.
- **a)** Calculer la dérivée f' de f.
- **b)** Etudier le signe de la dérivée f'.
- **c)** En déduire le tableau de variations de la fonction f.

2) Etude de g.
- **a)** Calculer la dérivée g' de g.
- **b)** Etudier le signe de la dérivée g'.
- **c)** En déduire le tableau de variations de la fonction g.

3) Comparaison des deux fonctions.
- **a)** Graphiques.
  - *i.* Tracer soigneusement, dans un même repère, les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ représentant les fonctions f et g. On se limitera à l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$.
  - *ii.* A l'aide du graphique, essayer de répondre aux questions suivantes :
    - A. Combien y a-t-il de points d'intersections entre $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$?
    - B. Quelles sont leurs coordonnées ?
- **b)** Pour avoir plus de précision, on se propose de retrouver ces résultats par le calcul.
  - *i.* Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.
  - *ii.* En déduire, par calcul, les coordonnées des points A et B d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$.

Illustration



Exercice 6

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.

1) Démontrer que f est une fonction paire.

2) Calculer la dérivée f' de f.

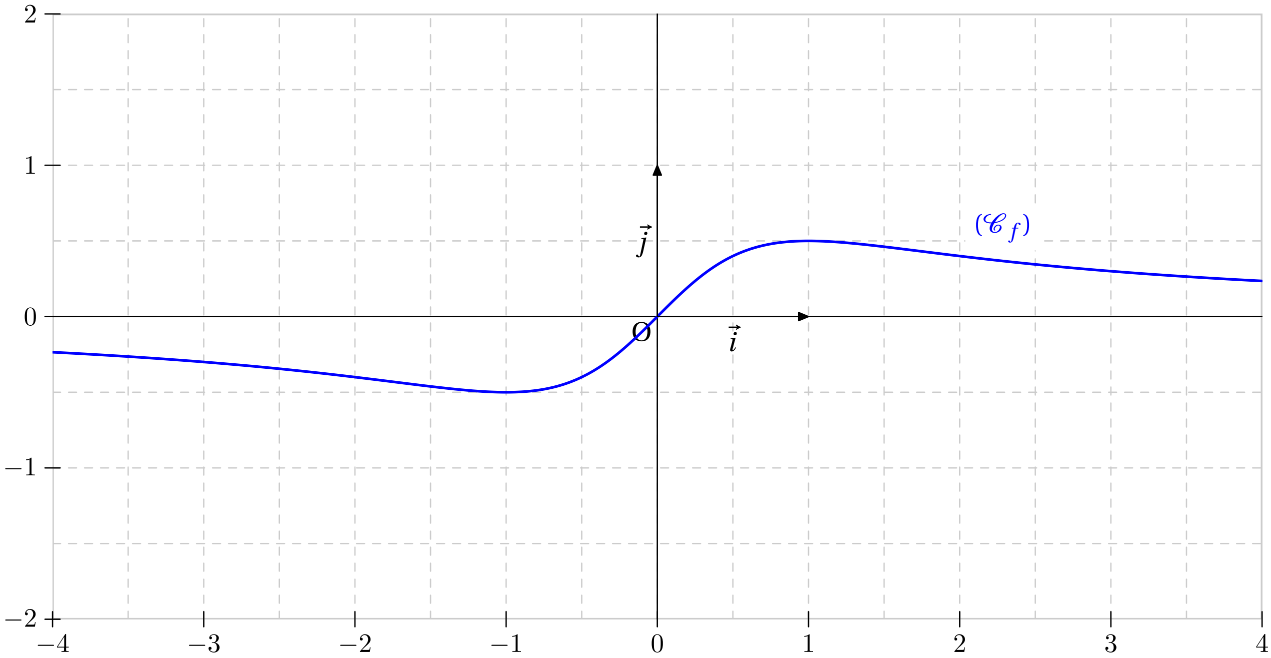
3) Quel est le signe du dénominateur de $f'(x)$?

4) Résoudre l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.

5) Dresser le tableau de variations de la fonction f en précisant la valeur M de son maximum et la valeur m de son minimum.

6) Tracer soigneusement la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-4\ ;\ 4]$.

Illustration



Exercice 7

On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par :

$$f(x) = x - 1 \qquad\qquad g(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

1) Etude de f.

- **a)** Calculer la dérivée f' de f.
- **b)** Etudier le signe de la dérivée f'.
- **c)** En déduire le tableau de variations de la fonction f.

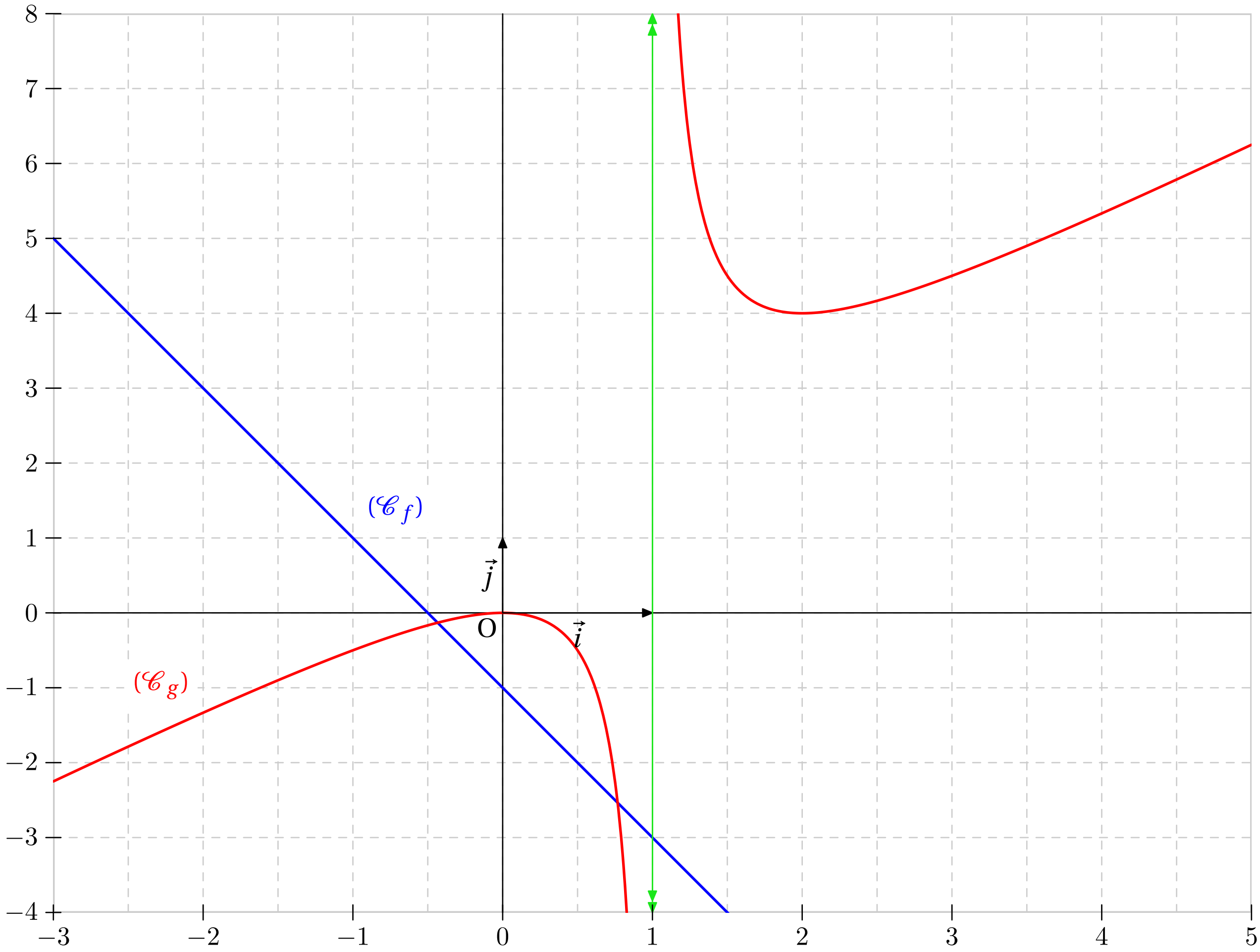
2) Etude de g.

- **a)** Calculer la dérivée g' de g.
- **b)** Etudier le signe de la dérivée g'.
- **c)** En déduire le tableau de variations de la fonction g.

3) Comparaison des deux fonctions.

- **a)** Graphiques.
  - *i.* Tracer soigneusement, dans un même repère, les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ représentant les fonctions f et g. On se limitera à l'intervalle $[-3\ ;\ 5]$.
  - *ii.* A l'aide du graphique, essayer de répondre aux questions suivantes :
    - A. Combien y a-t-il de point(s) d'intersection(s) entre $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$?
    - B. Quelles sont leurs coordonnées ?
- **b)** Pour avoir plus de précision, on se propose de retrouver ces résultats par le calcul.
  - *i.* Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.
  - *ii.* En déduire, par calcul, les coordonnées des points A et B d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$.

Illustration



Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.

1) Calculer la dérivée f' de f.

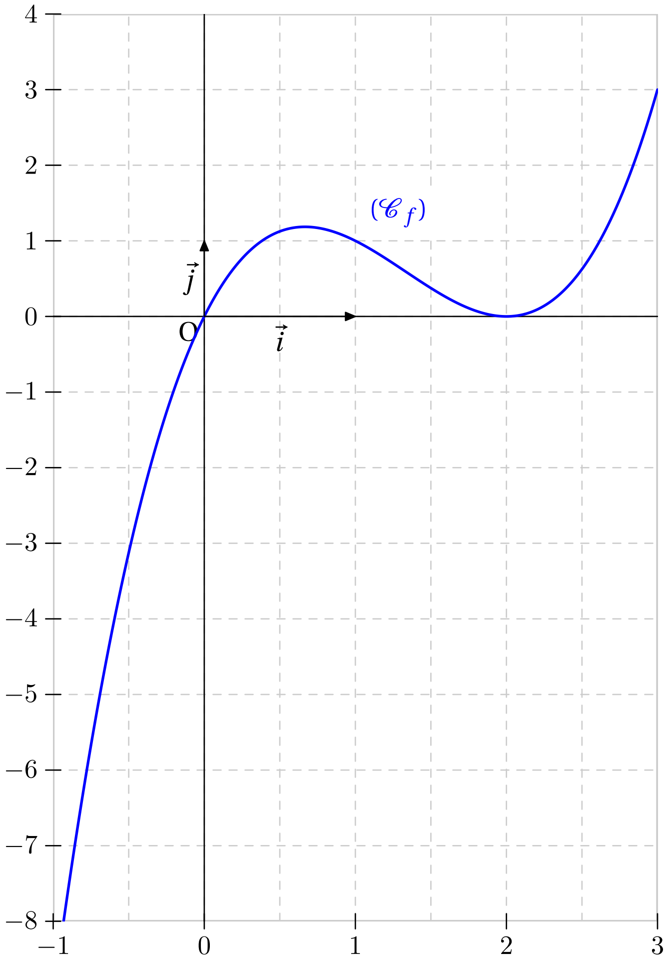
2) Etudier le signe de la dérivée f'.

3) En déduire le tableau de variations de la fonction f. On précisera les éventuels extremums.

4) Tracer soigneusement la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-1\ ;\ 3]$.

5) Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des abscisses.

Illustration

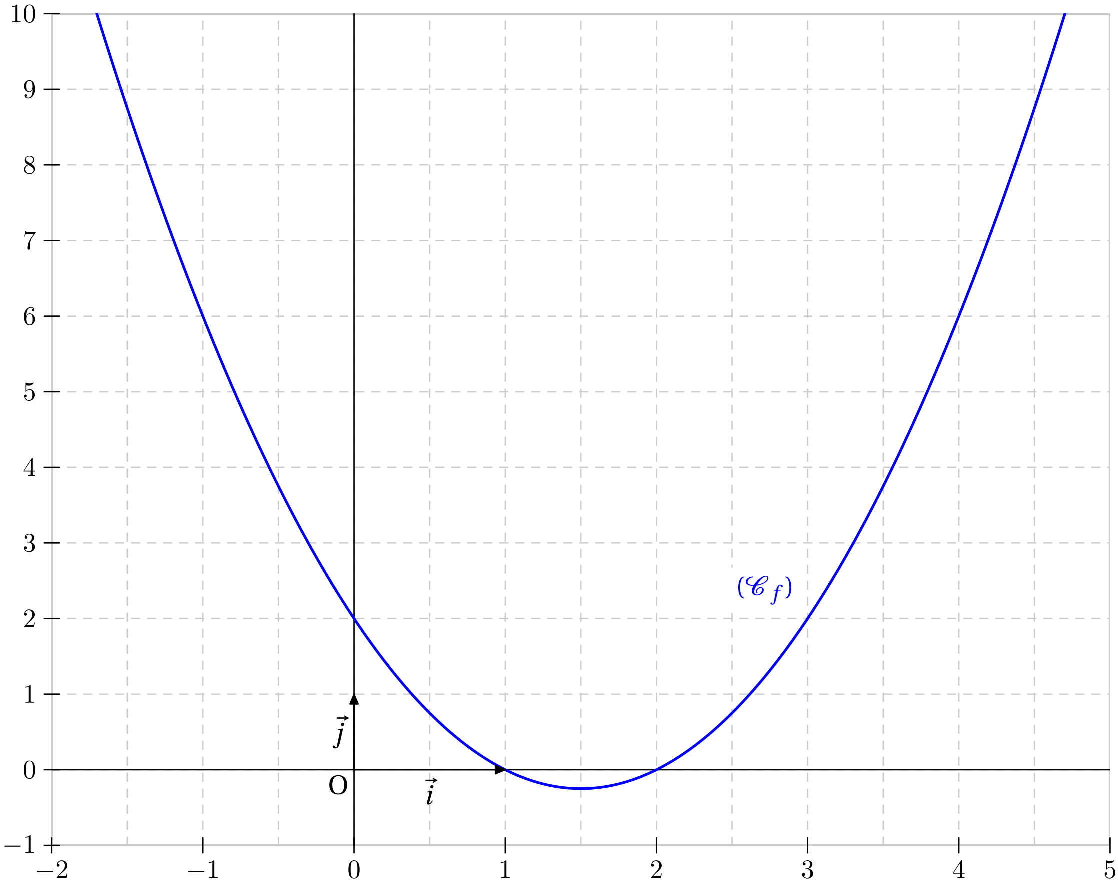


Exercice 9

1) Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

2) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Illustration



Exercice 10

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x - 3$.
On note $(\mathcal{C}_f)$ sa représentation graphique.

1) Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe.

2) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

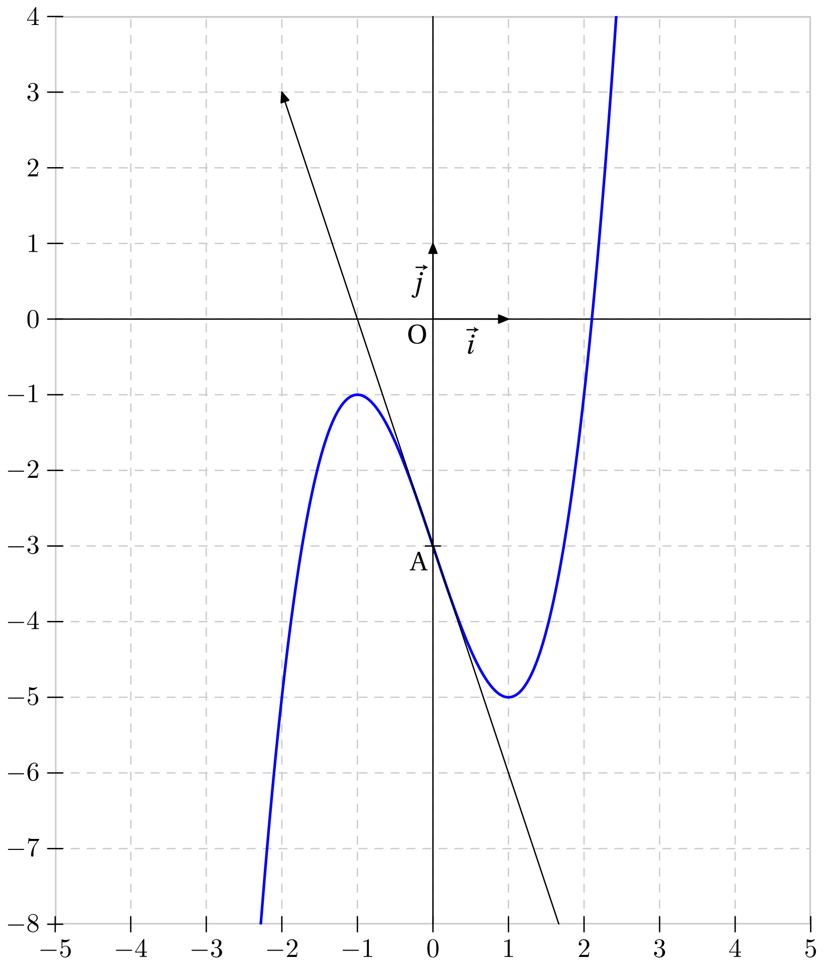
3) Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0.

4) Tracer (T) et $(\mathcal{C}_f)$ dans un même repère.

5) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[2\ ;\ 3]$.

6) Donner une valeur approchée de α, par défaut, à 10^{-1} près.

Illustration



Exercice 11

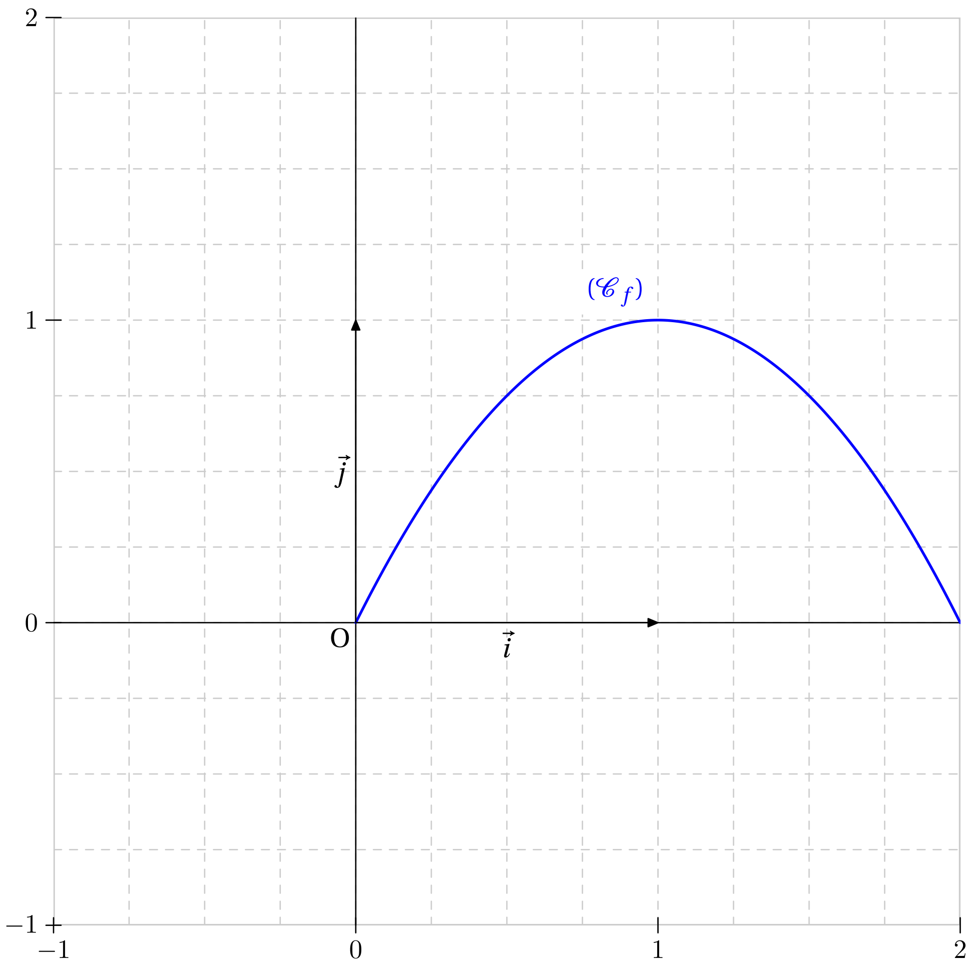
On considère un rectangle dont le périmètre P est égal à $4\ m$.

1) Déterminer ses dimensions (longueur L et largeur l) sachant que son aire S est égale à $\frac{3}{4}\ cm^2$.

2) On recherche maintenant les dimensions du rectangle de façon que son aire S soit maximale.

- **a)** Exprimer S en fonction de l.
- **b)** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(2 - x)$.
  Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe.
  Dresser le tableau de variations de la fonction f.
  Tracer la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f sur $[0\ ;\ 2]$.
- **c)** En déduire les dimensons du rectangle dont le périmétre P est égal à $4\ m$ et l'aire S est maximale.

Illustration



Exercice 12

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.

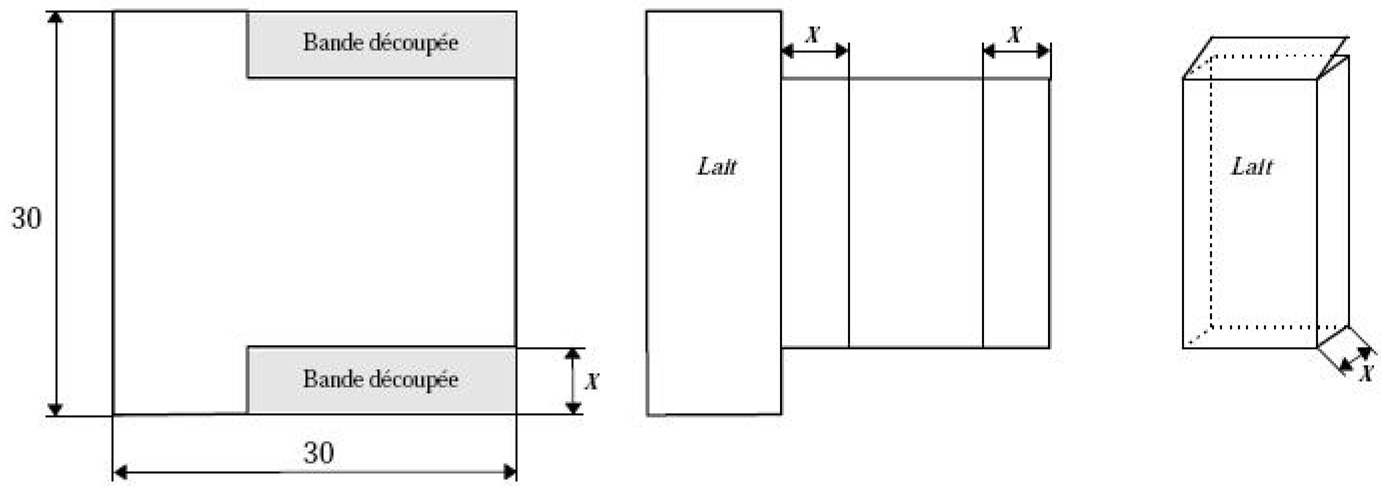
a) Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0\ ;\ 20]$. Dresser le tableau de variations de f.

b) Déterminer une équation de la tangente (Δ) à la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ de f au point d'abscisse 0.

c) Déterminer, par le calcul, les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des abscisses.

d) Tracer (Δ) et $(\mathcal{C}_f)$ pour $x \in [0\ ;\ 20]$.

2) Un fabriquant envisage la production de briques de lait en carton obtenues en découpant deux bandes de même largeur dans une feuille carrée.

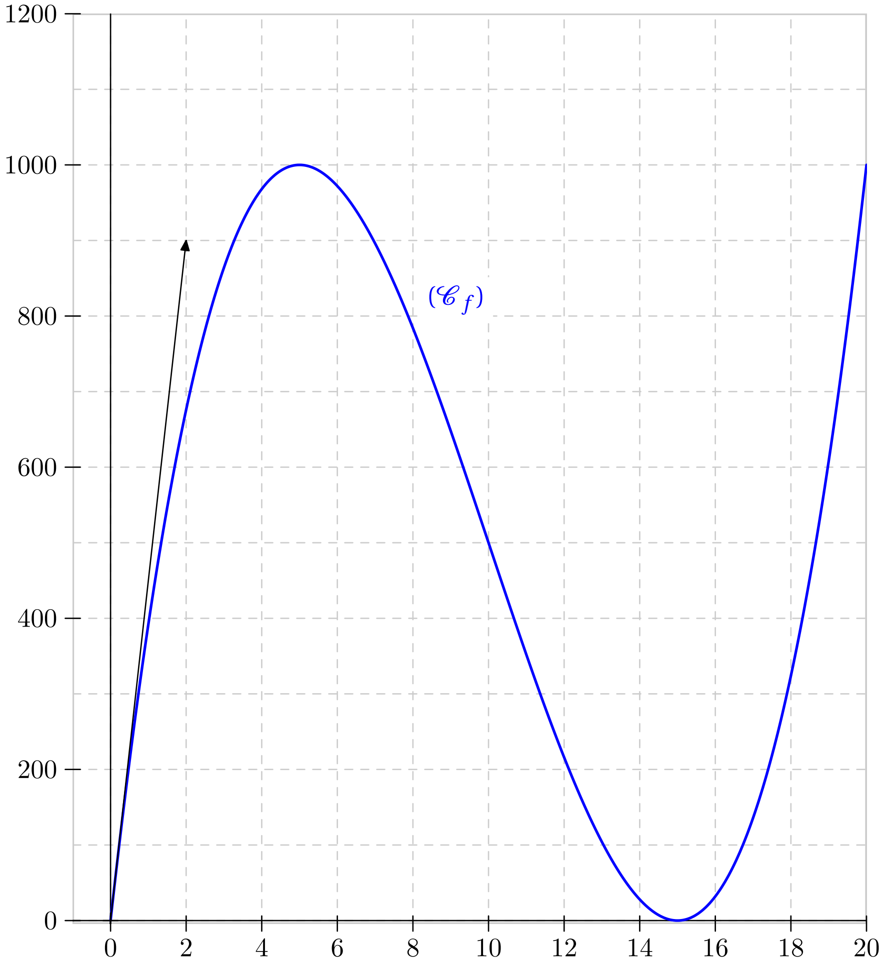


Le côté de la feuille mesure $30\ cm$ et on désigne par x la mesure (en centimètres) de la largeur des bandes découpées. On suppose que $0 < x < 15$.

a) Démontrer que le volume (en cm^3) de la boîte est $V(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.

b) Pour quelle valeur de x le volume $V(x)$ est-il maximal ? Préciser la valeur de ce volume maximal en litres.

Illustration



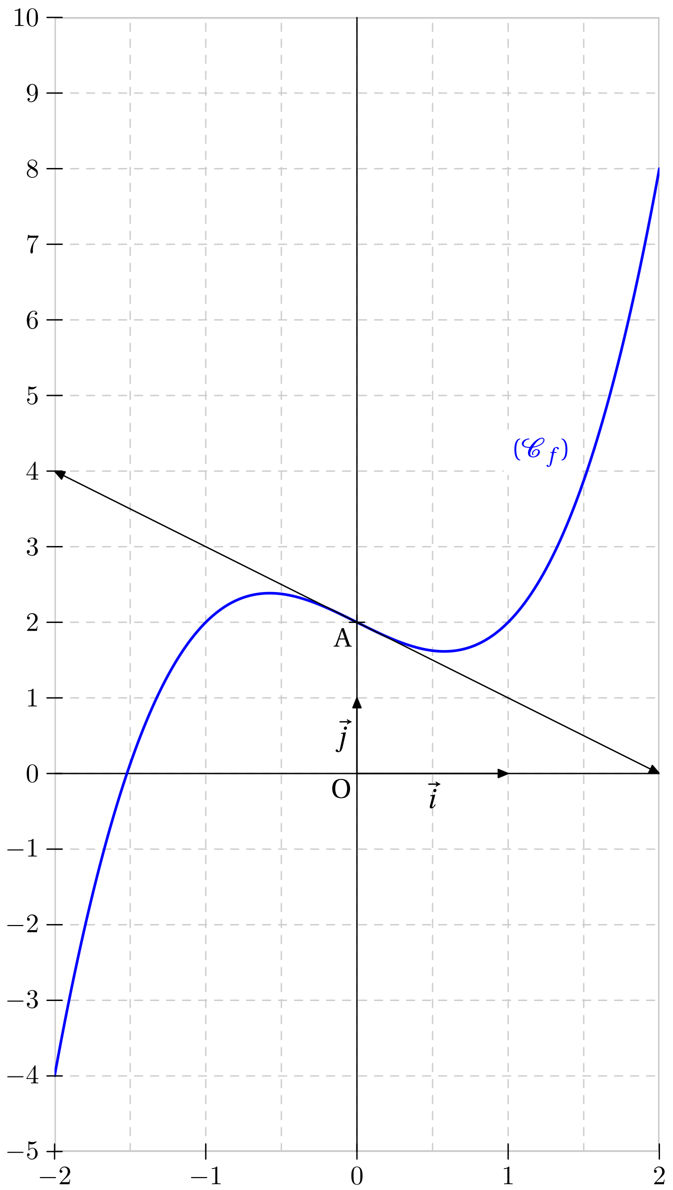
Exercice 13

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - x + 2$ sur l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$.
Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative.

1) Donner, en justifiant, l'équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point A d'abscisse 0.

2) Tracer dans un même repère la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la tangente (T) sur l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$.

Illustration

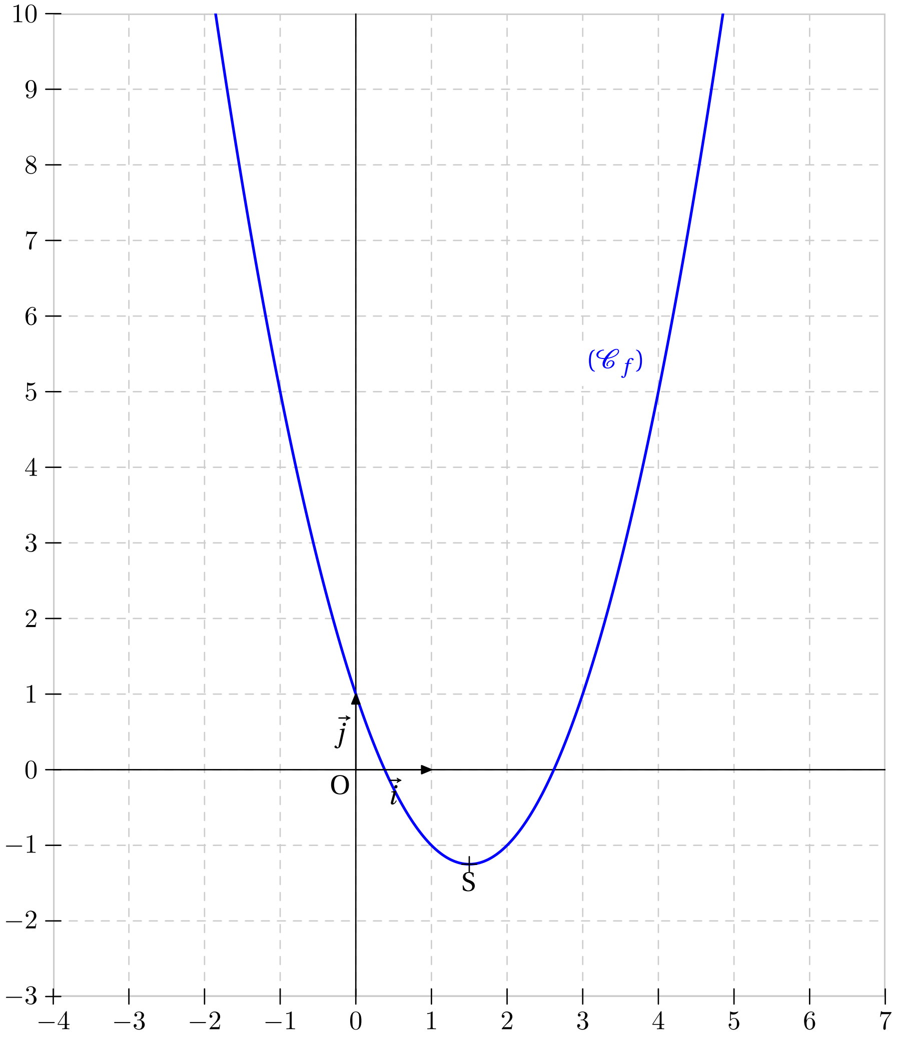


Exercice 14

Soit $(\mathcal{P})$ la parabole définie par la fonction $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

Calculer les coordonnées de son sommet S.

Illustration



Exercice 15

Un camion doit faire un trajet de $150\ km$. Sa consommation de gasoil est de $6+\dfrac{v^2}{300}$ litres par heure, où v désigne sa vitesse en $km.h^{-1}$. Le prix du gasoil est de $0,9$ € le litre et on paie le chaufeur 12 € par heure.

1) Soit t la durée du trajet en heure. Exprimer t en fonction de la vitesse v.

2) Calculer le prix de revient $P(v)$ du trajet en fonction de v.

3) Quel doit être la vitesse v du camion pour que le prix de revient $P(v)$ de la course soit minimal ?

Exercice 16

Le but de cet exercice est de calculer la limite suivante :

$$\lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^{2005} - 1}{h}.$$

Pour cela, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+x)^{2005}$.

1) Calculer la dérivée f' de la fonction f. Calculer $f'(0)$.

2) Calculer l'accroissement moyen de la fonction f entre 0 et h. En déduire la limite ci-dessus.

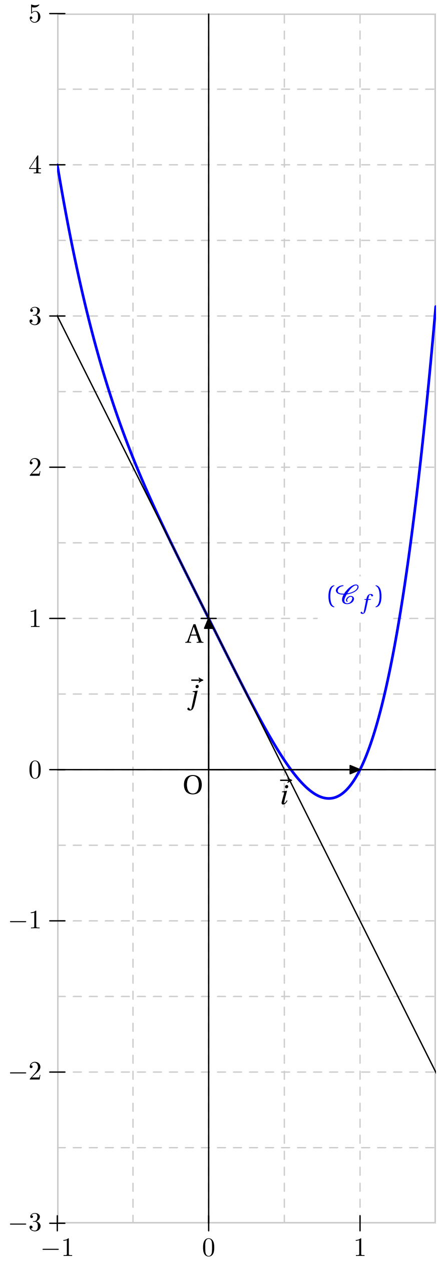
Exercice 17

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x + 1$. Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative.

1) Donner, en justifiant, l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point A d'abscisse 0.

2) Tracer dans un même repère la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la tangente (T) sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1,5]$.

Illustration



Exercice 18

1) Dériver les fonctions f et g définies ci-dessous :

$$f(x) = \frac{x}{x+\sqrt{x}} \text{ sur }]0\ ;\ +\infty[\qquad\qquad g(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)^3 \text{ sur } \mathbb{R}\backslash\{-1\}$$

2) Calculer $f'(16)$ et $g'(2)$.

Exercice 19

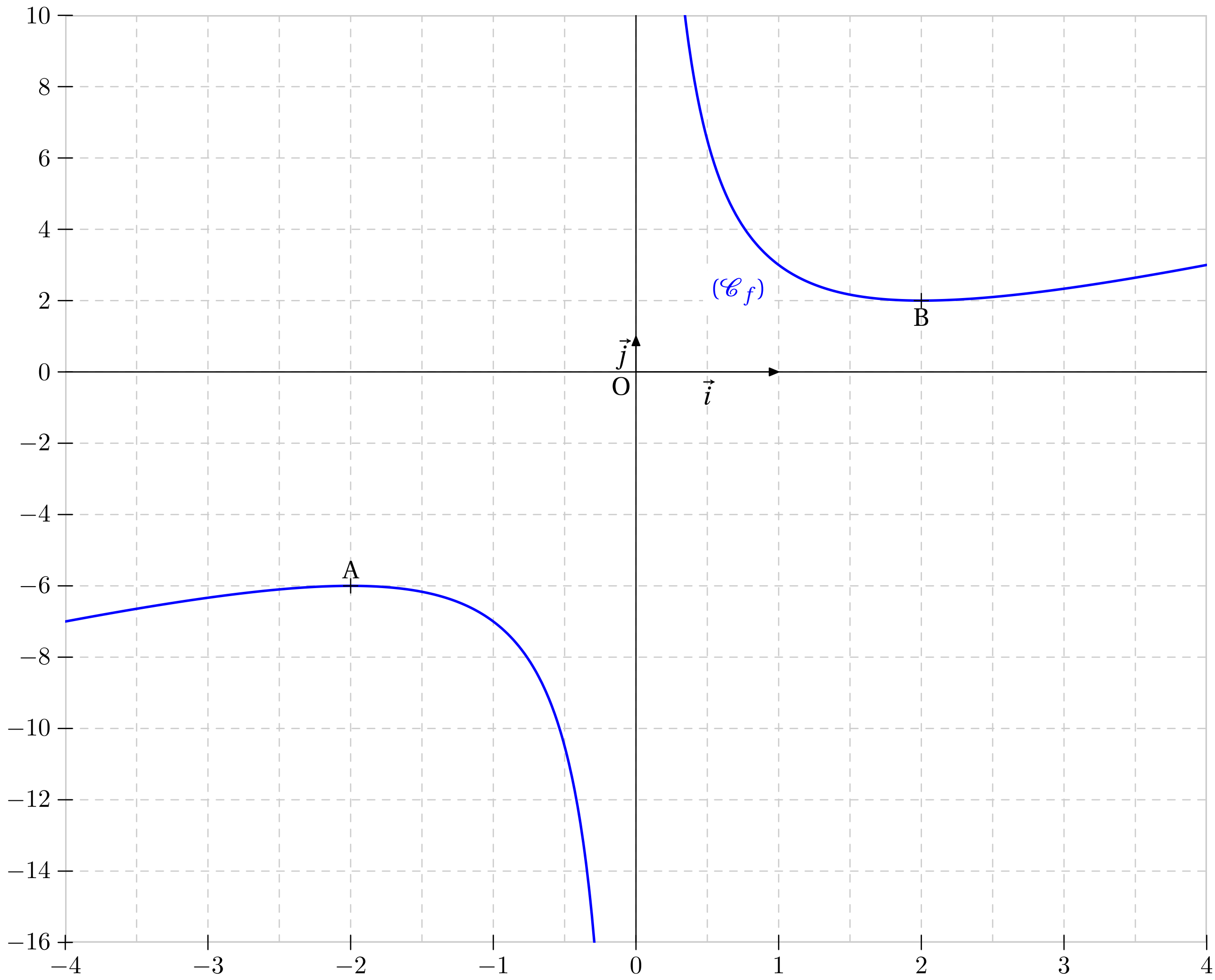
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x - 2 + \dfrac{4}{x}$.

1) Calculer la dérivée f' et étudier son signe.

2) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

3) Tracer la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f sur $[-4\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ 4]$.

Illustration



Exercice 20

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x-2} \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

1) Déterminer $f'(x)$.

2) Déterminer a et b tels que la droite d'équation $y = 8$ soit tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 3.

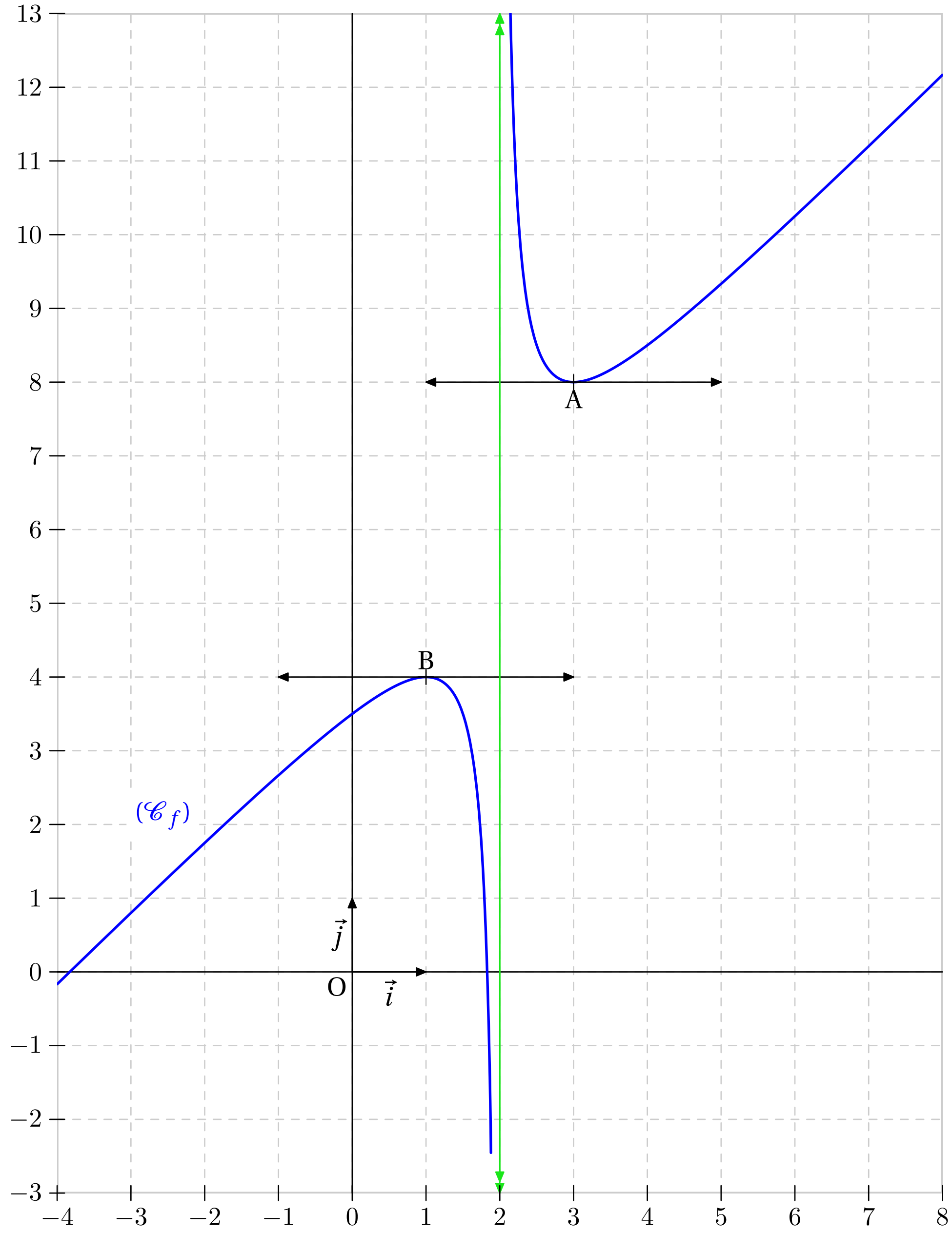
3) Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) \qquad \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) \qquad \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)$$

4) Déduire de la question précédente que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote dont on précisera une équation.

5) Question facultative : déterminer l'abscisse de l'autre point de $(\mathcal{C}_f)$ où la tangente est horizontale.

Illustration



Exercice 21

Question préliminaire : factoriser le polynôme $P(x) = x^2 + 2x - 3$.

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -2x^2 + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = x^3 - 3x + 1.$$

1) Etudier la parité des fonctions f et g.

2) Etudier les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions f et g.

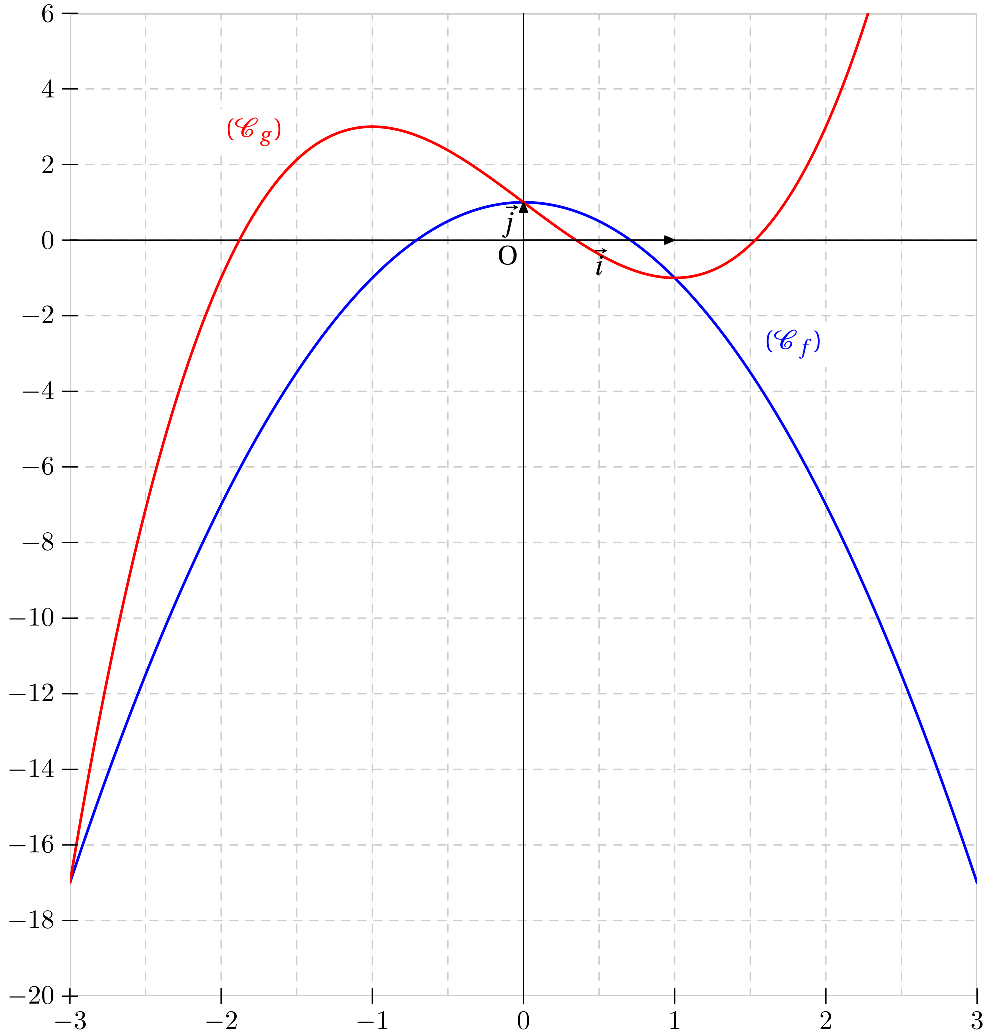
3) Calculer les dérivées f' et g'. Etudier leur signe.

4) Dresser les tableaux de variations des fonctions f et g.

5) Tracer les courbes représentatives $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ des fonctions f et g. On se limitera à l'intervalle $[-3\ ;\ 3]$.

6) Résoudre, par le calcul, l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$. On pourra utiliser la question préliminaire.

Illustration



Exercice 22

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 2}.$$

1) Etudier les limites de la fonction f en $-\infty$, $+\infty$ et 2 par valeurs inférieures et supérieures. Préciser les éventuelles asymptotes horizontales et verticales.

2) Calculer la dérivée f' et étudier son signe.

3) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4) Le but de cet question est de démontrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique (Δ).

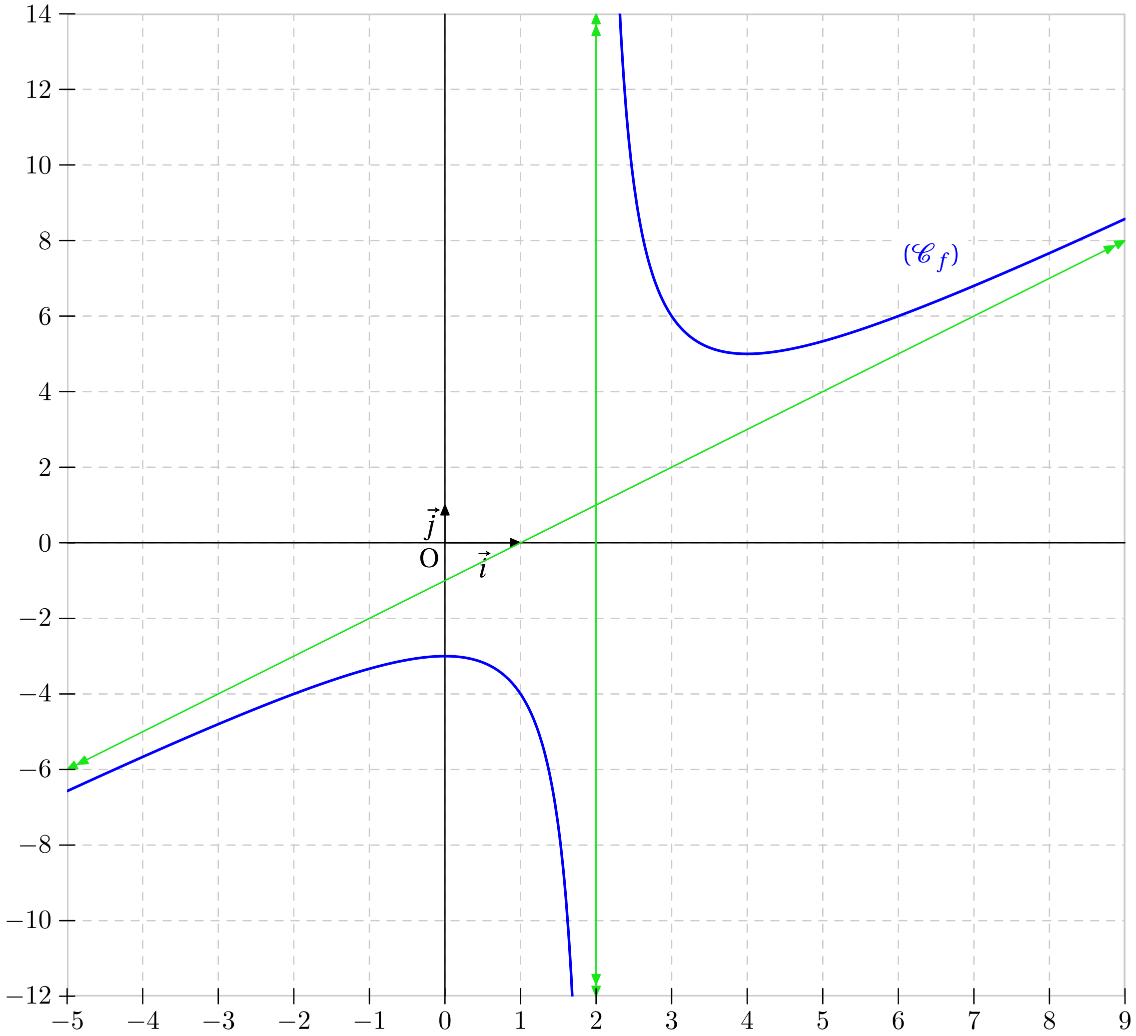
- **a)** Déterminer trois réels a, b et c tels que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}.$$

- **b)** En déduire que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

5) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ et ses asymptotes.

Illustration



Exercice 23

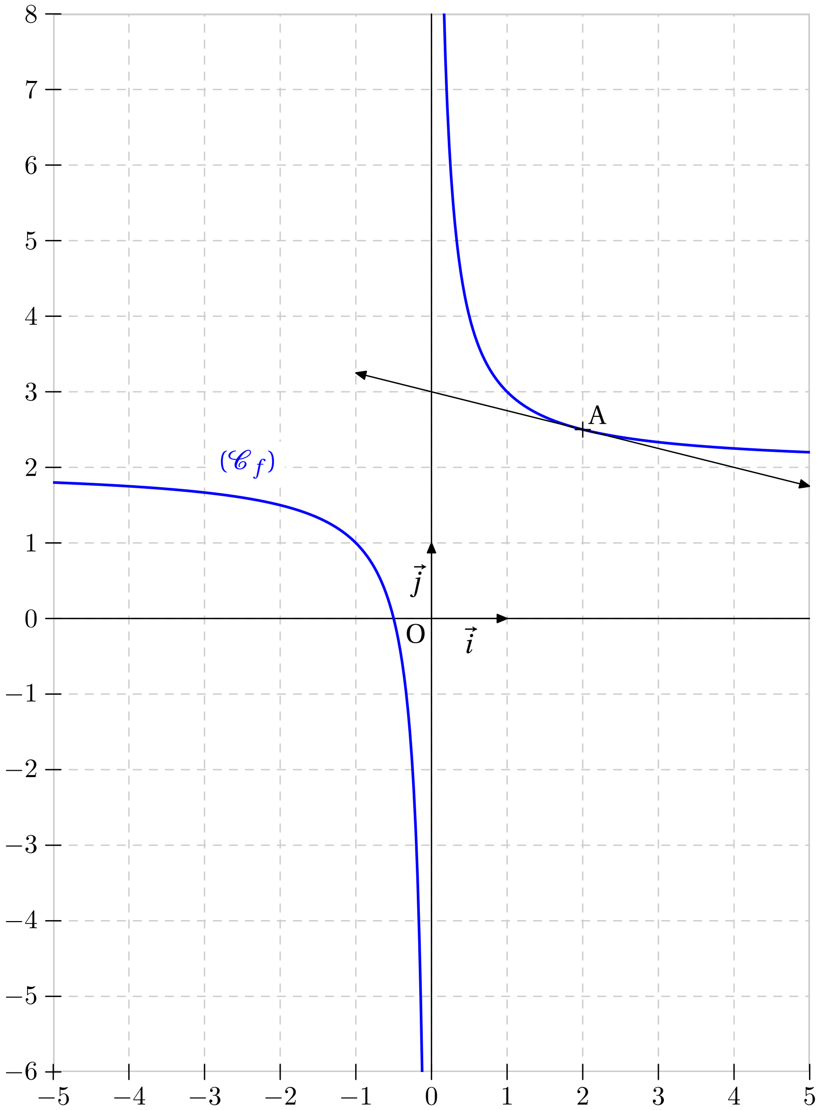
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} + 2.$$

1) Montrer que f est dérivable en 2.

2) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ représentant f au point d'abscisse 2.

Illustration



Exercice 24

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-4\}$ par :

$$f(x) = -\frac{3}{x+4} + 2.$$

On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\,)$.

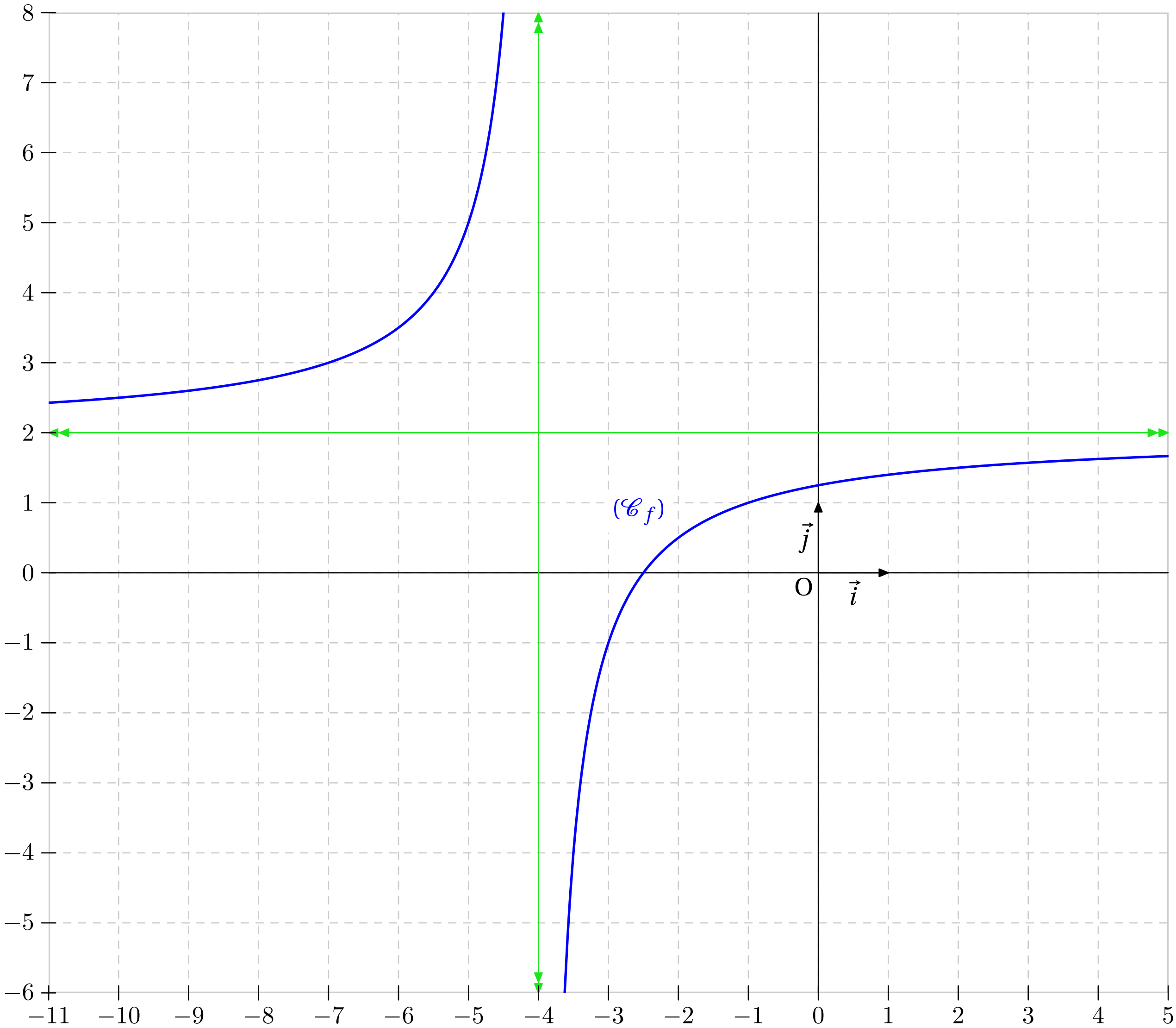
1) Etudier les limites de f en $-\infty$, $+\infty$ et en -4 par valeurs inférieures et supérieures.
Préciser les équations des éventuelles asymptotes.

2) Calculer la dérivée f' de la fonction f et préciser son signe.

3) Dresser le tableau de variations complet de la fonction f. On n'oubliera pas d'y reporter les limites calculées à la question $1)$ ainsi que la valeur interdite ...

4) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ avec ses éventuelles asymptotes.
Conseil : tracer d'abord les asymptotes, s'il y en a ...

Illustration



Exercice 25

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par :

$$f(x) = -\frac{2}{x-1} + 3.$$

On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

1) Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2) Etudier les limites de f en 1 par valeurs inférieures et supérieures.

3) Calculer la dérivée f' de la fonction f. Quel est son signe ?

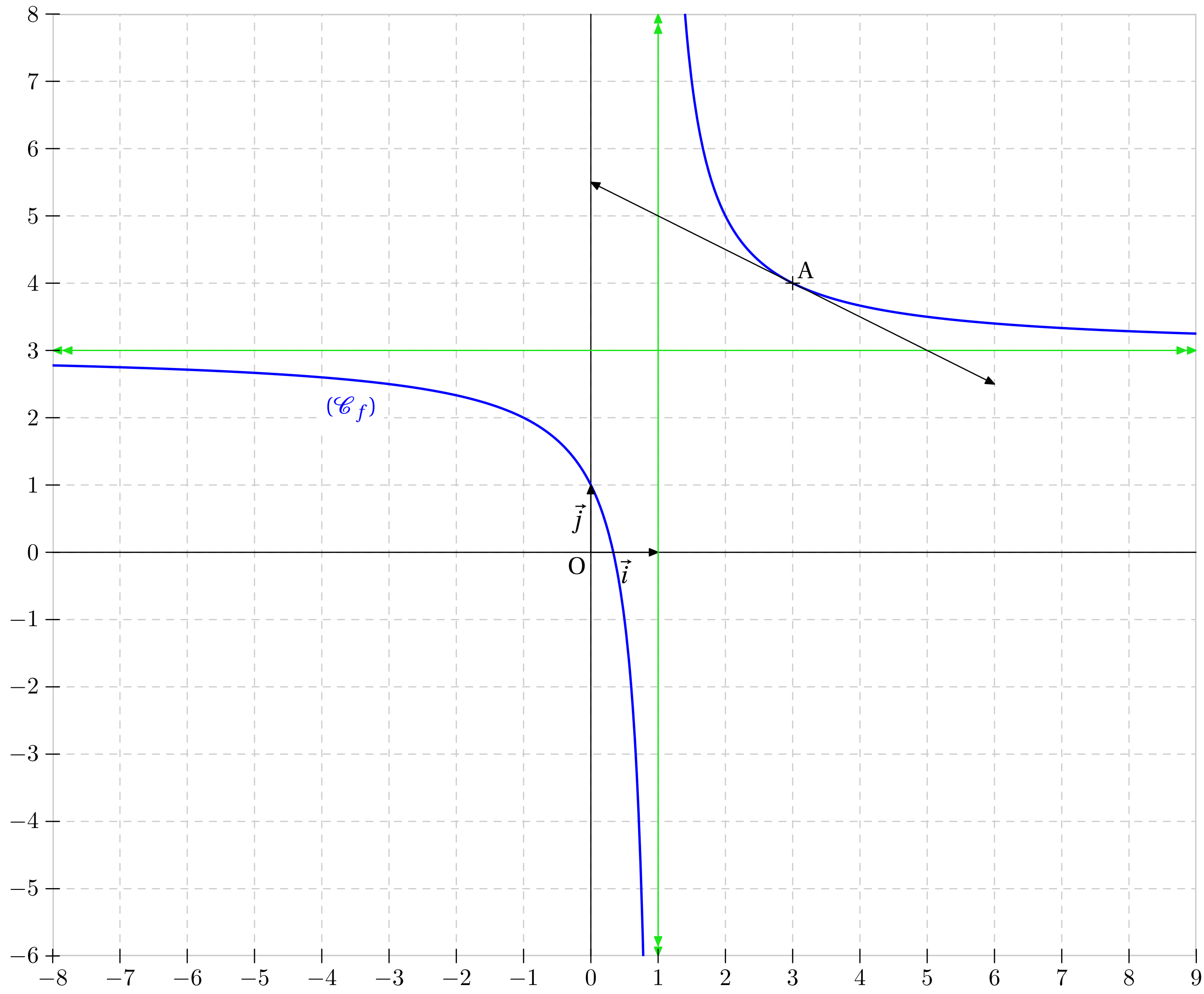
4) Dresser le tableau de variations complet de la fonction f.

5) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 3.

6) Tracer la tangente (T), la courbe $(\mathcal{C}_f)$ avec ses éventuelles asymptotes.

7) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant 1$.

Illustration



Exercice 26

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x}.$$

On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère $(O\ ; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

2) Vérifier que $f(x) = x - 3 + \dfrac{1}{x}$.

3) Etudier la limite de f quand x tend vers 0. En déduire que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote (D) dont on précisera une équation.

4) Etudier la limite de f quand x tend vers $+\infty$.

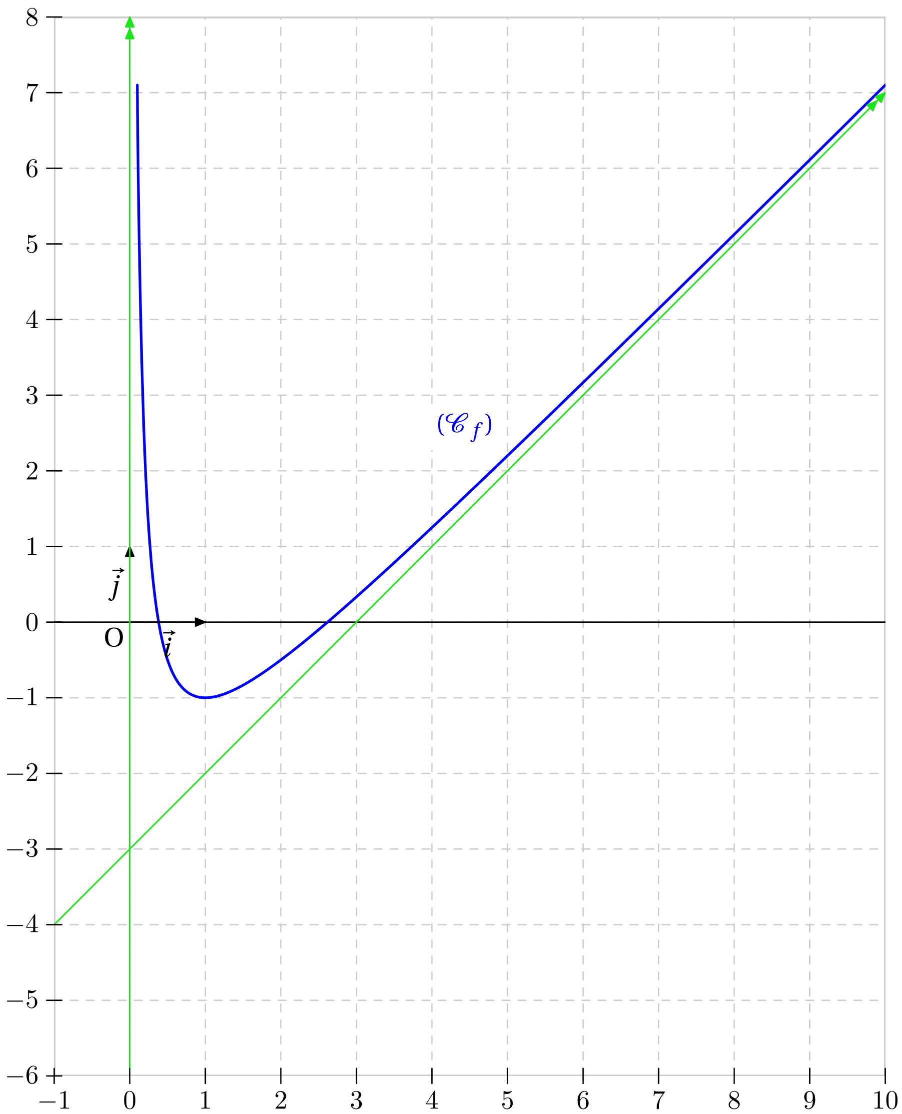
5) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x - 3)]$.
En déduire que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique (Δ) en $+\infty$ dont on précisera l'équation.
Quelle est la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (Δ) ?

6) Calculer la dérivée f' de f et montrer que l'on a :

$$f'(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}.$$

7) Etudier le signe de f' puis en déduire le tableau de variations de f.

Illustration



Exercice 27

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}.$$

On note $(\mathcal{C}_f)$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$.

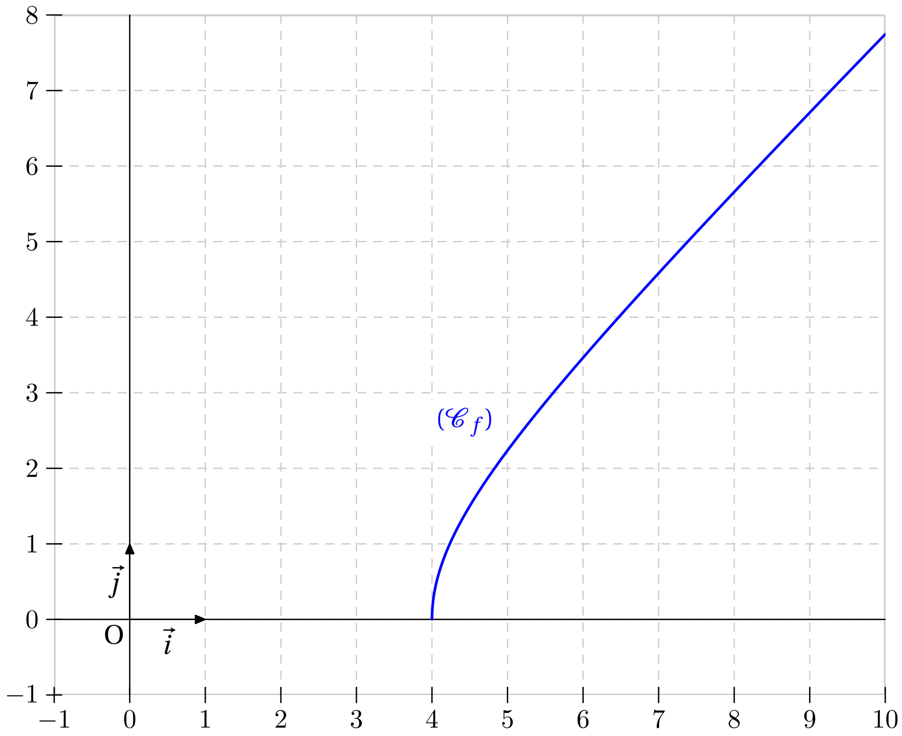
1) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.

2) Etudier les limites de f en 4 et en $+\infty$.

3) Etude de la fonction f sur $[4\ ;\ \infty[$.

- **a)** Etudier de la dérivabilité de la fonction f au point d'abscisse $x_0 = 4$.
- **b)** Calculer la dérivée f (pour $x > 4$). Etudier le tableau de variations de f sur l'intervalle $[4\ ;\ +\infty[$.
- **c)** Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ représentant f sur l'intervalle $[4\ ;\ 10]$.

Illustration



Exercice 28

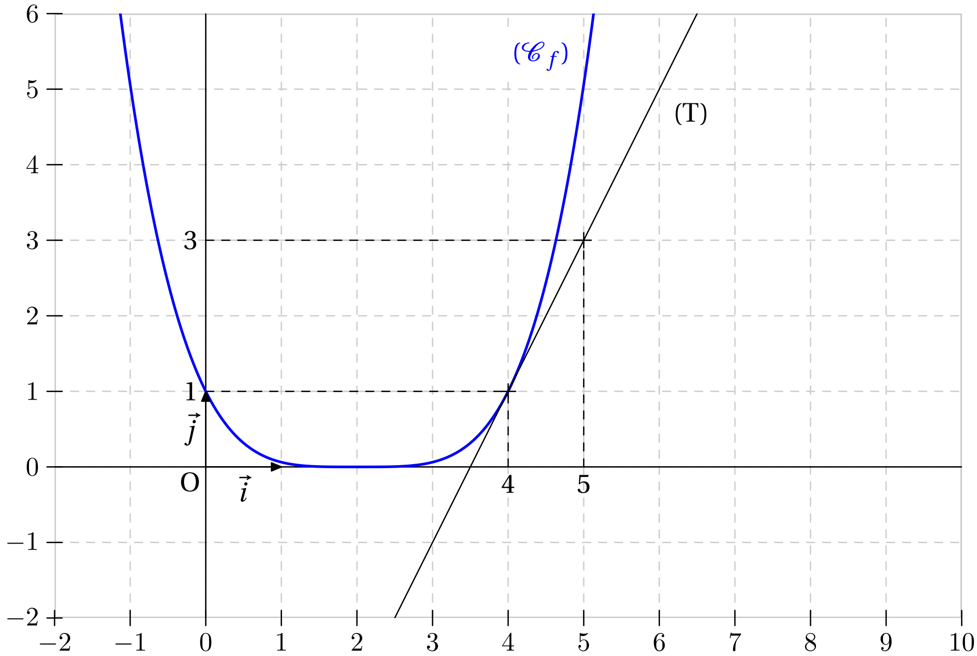
Sur le graphique ci-dessous sont représentées la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^4$$

ainsi que la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse $x_0 = 4$.

1) Donner, par lecture graphique, et sans justifications, la valeur du nombre $f'(4)$.

2) Déterminer, à l'aide du calcul de la dérivée de f, la valeur du nombre $f'(3)$.



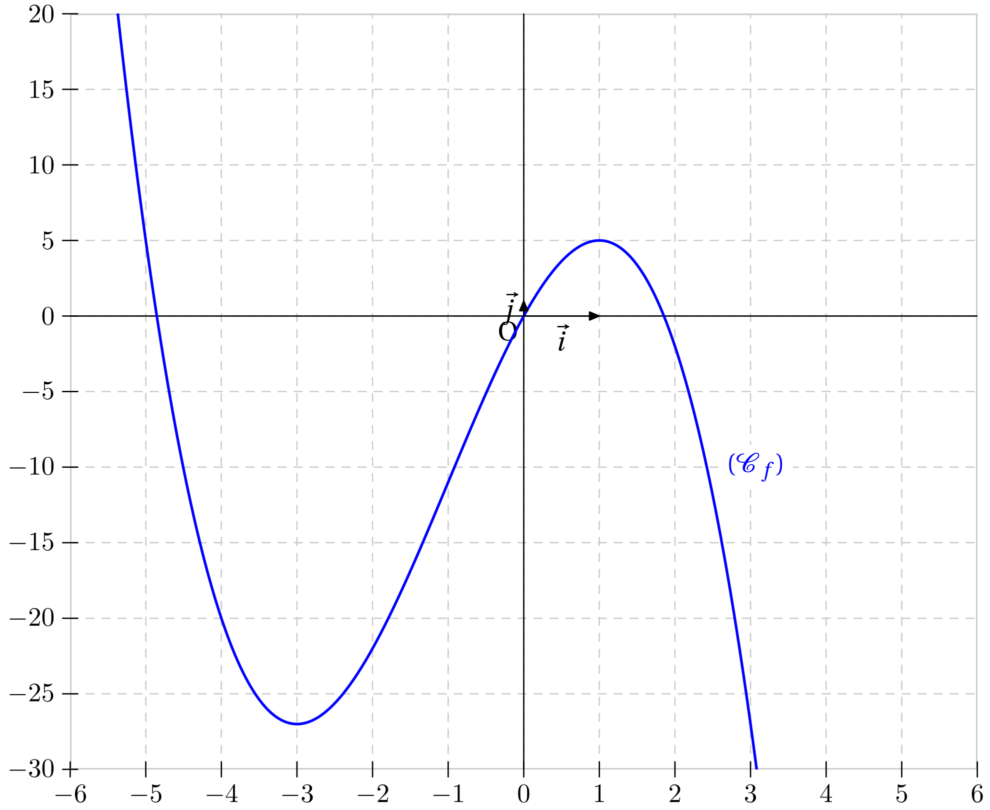
Exercice 29

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x$.

1) Calculer la dérivée f' et étudier son signe.

2) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

Illustration



Exercice 30

Soient f et g deux fonctions dérivables sur l'intervalle $I = [0\ ;\ 1]$ telles que : $f(0) = g(0)$ et $f' \leqslant g'$ sur I.

Démontrer que $f \leqslant g$ sur I. On pourra étudier les variations de $g - f$.

Exercice 31

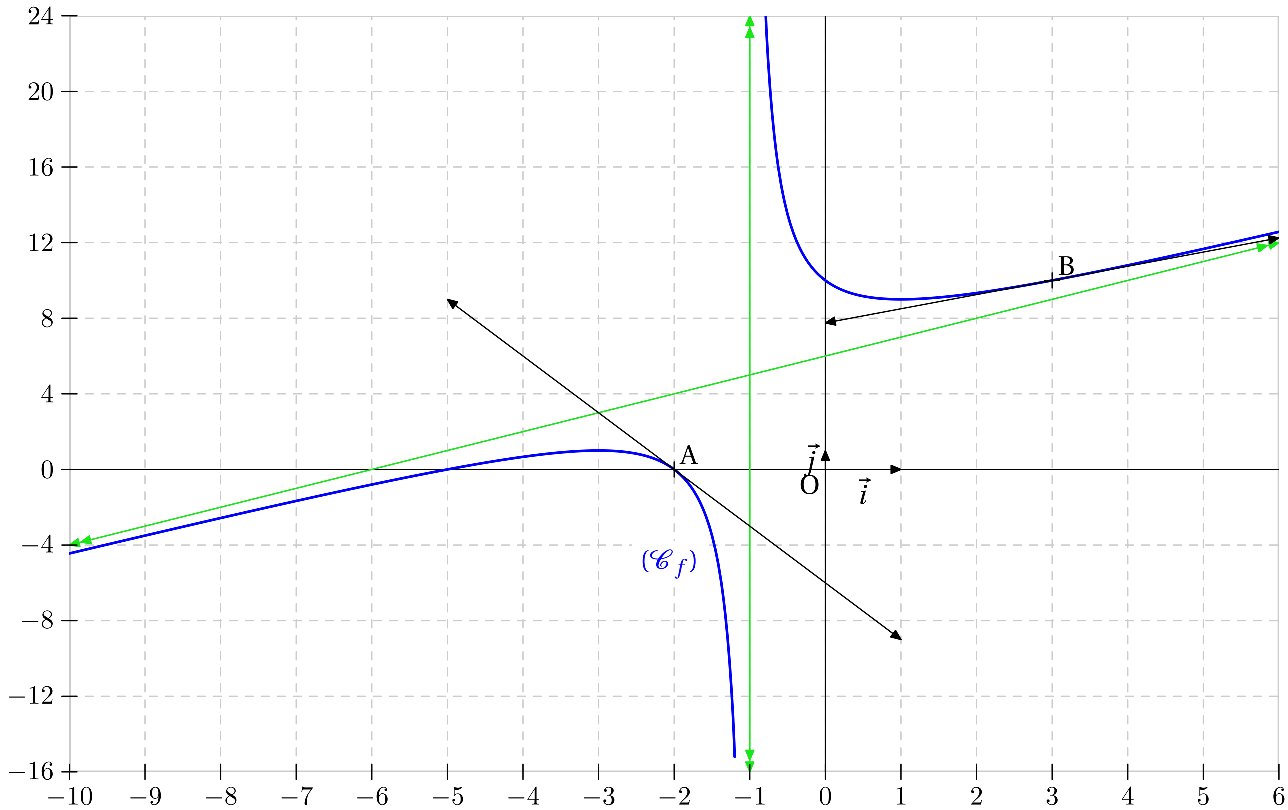
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2+7x+10}{x+1}.$$

On note $(\mathcal{C}_f)$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$.

1) Calculer $f(0)$. En déduire les coordonnées du point d'intersection de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des ordonnées.
2) Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des abscisees.
3) Déterminer les réels a, b et c tels que :
$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}.$$
4) Etudier les limites de f en -1 par valeurs inférieures et supérieures. En déduire que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote verticale (D) dont on précisera l'équation.
5) Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet-elle une asymptote horizontale ?
6) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 6$ est asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$ et en $-\infty$. Préciser la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et de (Δ).
7) Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe. En déduire le tableau de variations de f.
8) Déterminer une équation des tangentes (T_A) et (T_B) aux points A et B de $(\mathcal{C}_f)$ d'abscisses respectives -2 et 3.
9) Tracer dans le repère (D), (Δ),(T_A), (T_B) et $(\mathcal{C}_f)$. On se limitera à $[-10\,;\,-1[\cup]-1\,;\,6]$.

Illustration



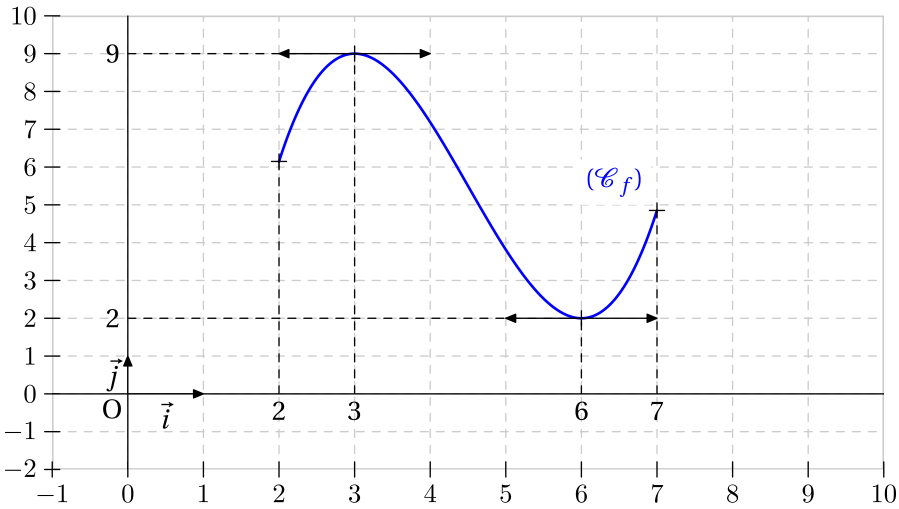
Exercice 32

Ci-dessous est donnée la courbe $(\mathcal{C}_f)$ représentant une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[2\ ;\ 7]$.

1) Par lecture graphique, donner sans justifier la valeur de :

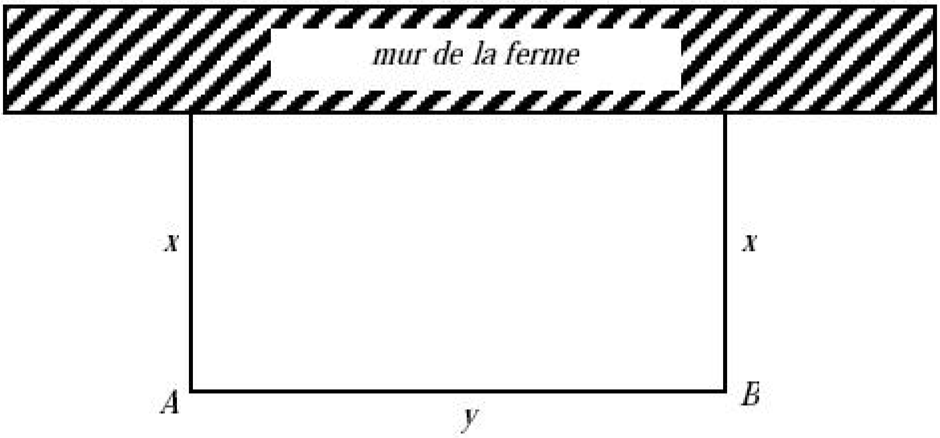
$$f(3)\ ;\ f'(3)\ ;\ f(6)\ ;\ f'(6).$$

2) Le graphique ne permet pas la lecture de $f'(4)$. Préciser néanmoins son signe. Expliquer.



Exercice 33

Un fermier décide de réaliser un poulailler de forme rectangulaire le long d'un mur de sa maison. Ce poulailler devra avoir une aire de 392 m^2. Le but du problème est de savoir où placer les piquets A et B pour que la longueur de la clôture soit minimale.



La figure ci-dessus représente le poulailler accolé à la ferme en vue de dessus. On appelle x la distance séparant chaque piquet au mur et y la distance entre les 2 piquets A et B. On a donc $x > 0$ et $y > 0$.

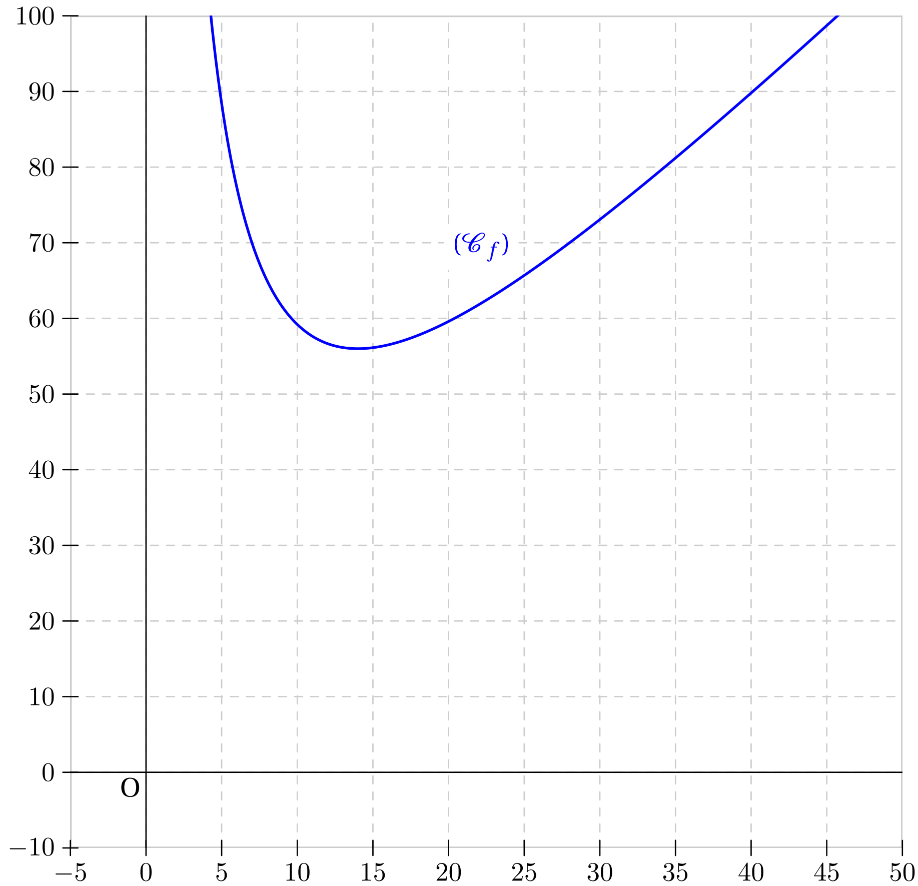
1) Sachant que l'aire du poulailler est 392 m^2, exprimer y en fonction de x.

2) Démontrer que la longueur $l(x)$ du grillage est : $l(x) = \dfrac{2x^2 + 392}{x}$.

3) Calculer la dérivée l' de l. En déduire le tableau de variations de l.

4) En déduire les dimensions x et y pour lesquelles la clôture a une longueur minimale. Préciser cette longueur.

Illustration



Exercice 34

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

1) On s'intéresse à la dérivabilité de f en 0.

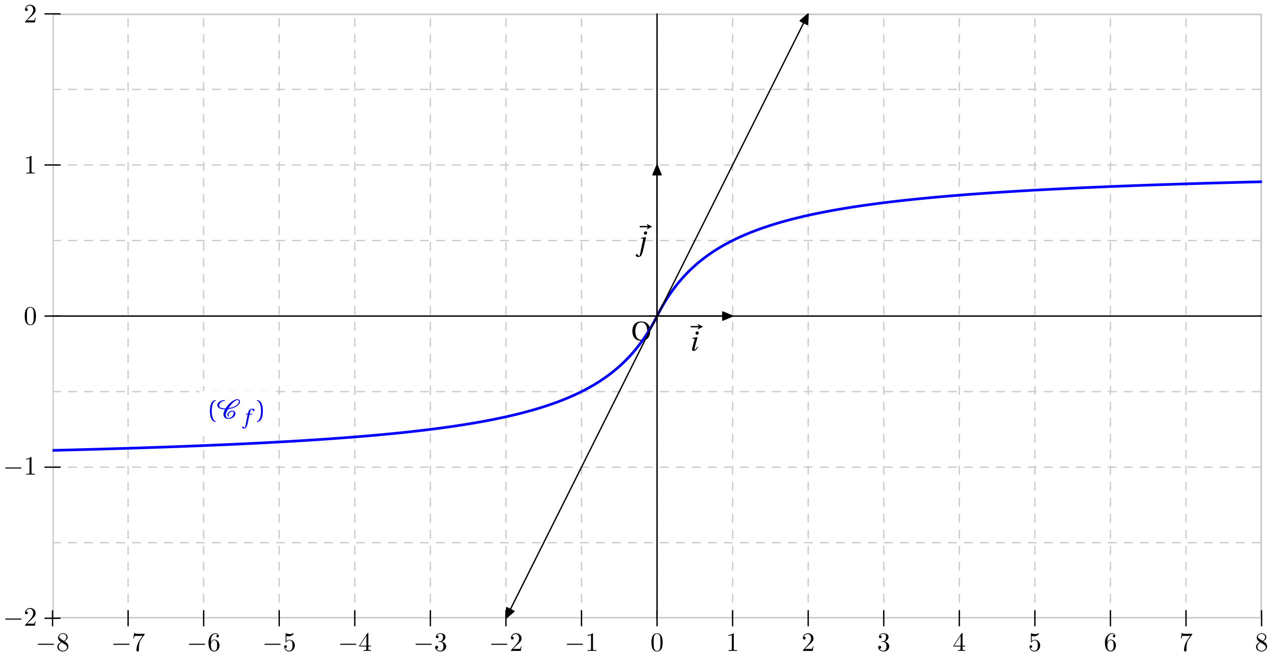
a) Calculer le rapport $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$.

b) En déduire que f est dérivable en 0. Que vaut ce nombre dérivé ?

c) Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ en 0.

2) Tracer la droite (T) et la courbe $(\mathcal{C}_f)$ représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-8\ ;\ 8]$.

Illustration



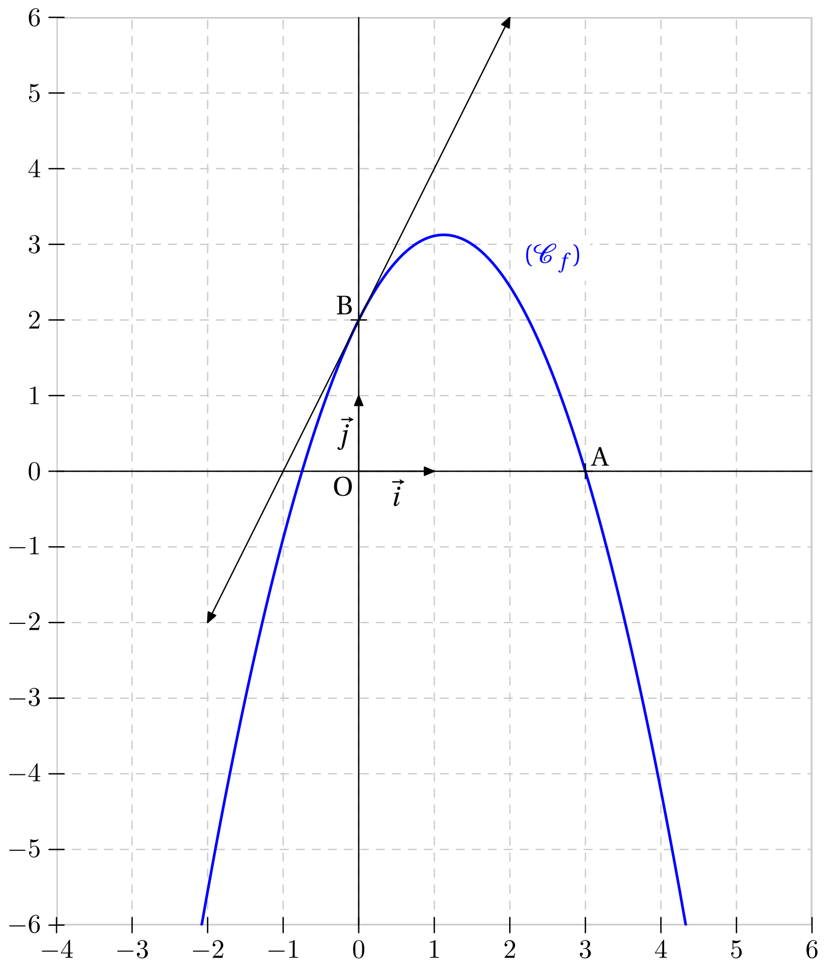
Exercice 35

Une parabole $(\mathcal{P})$ admet dans un repère $(O\,;\,\vec{i}, \vec{j})$ une équation du type :

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0).$$

Déterminer les coefficients a, b et c sachant que $(\mathcal{P})$ coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse 3, l'axe des ordonnées au point B d'ordonnée 2 et qu'elle admet en ce point la droite d'équation $y = 2x + 2$ pour tangente. Indiquer l'abscisse du second point d'intersection de $(\mathcal{P})$ avec (Ox).

Illustration



Exercice 36

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ par

$$f(x) = \frac{x^2+3x+3}{x+2}.$$

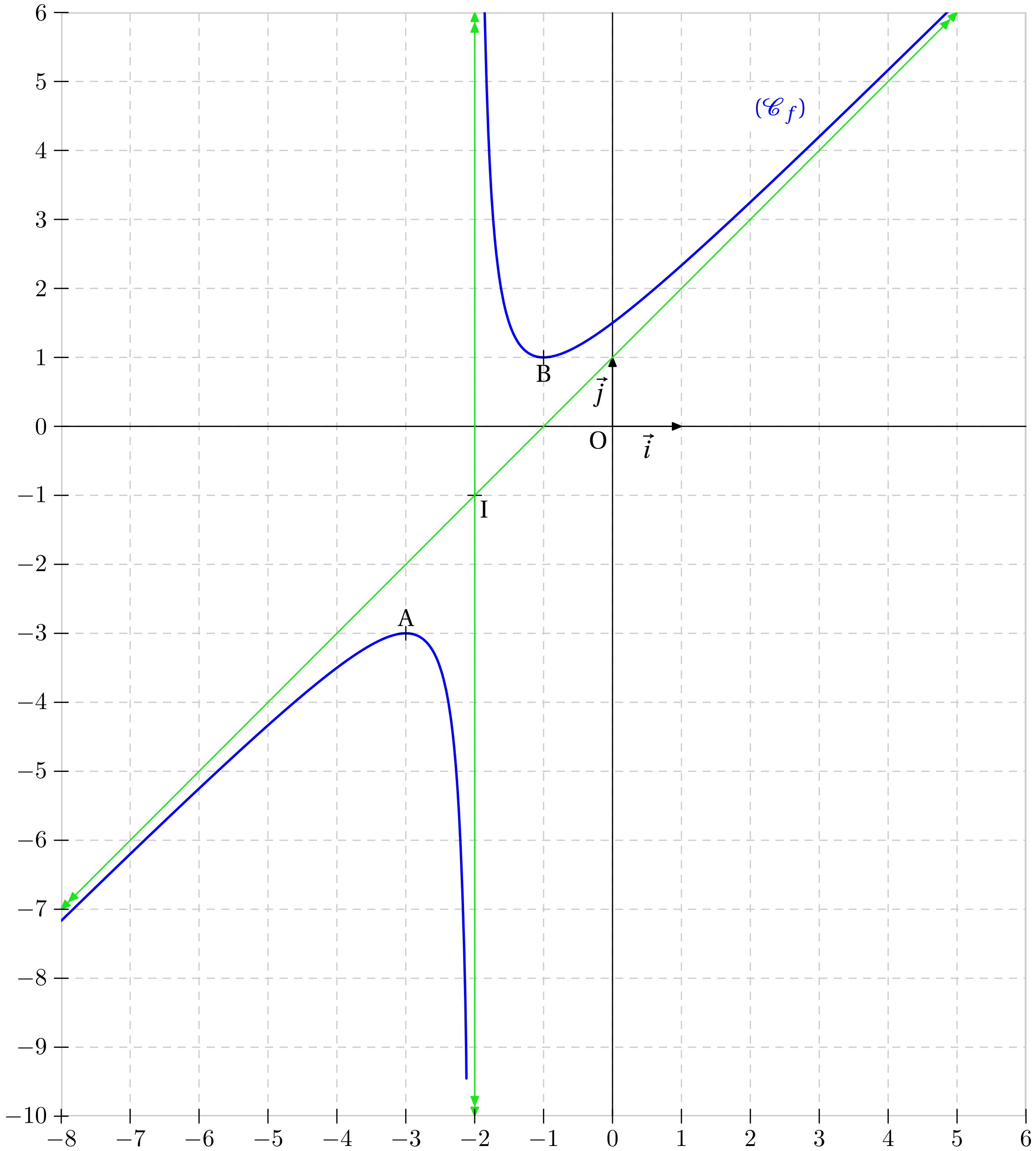
On appelle $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère $(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j})$.

1) Déterminer les réels a, b et c tels que $\quad f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+2}$.

2) Calculer la dérivée de f et étudier les variations de f.
Dresser son tableau de variations.

3) Montrer que le point $I(-2\,;\,-1)$ est le centre de symétrique de $(\mathcal{C}_f)$.

Illustration

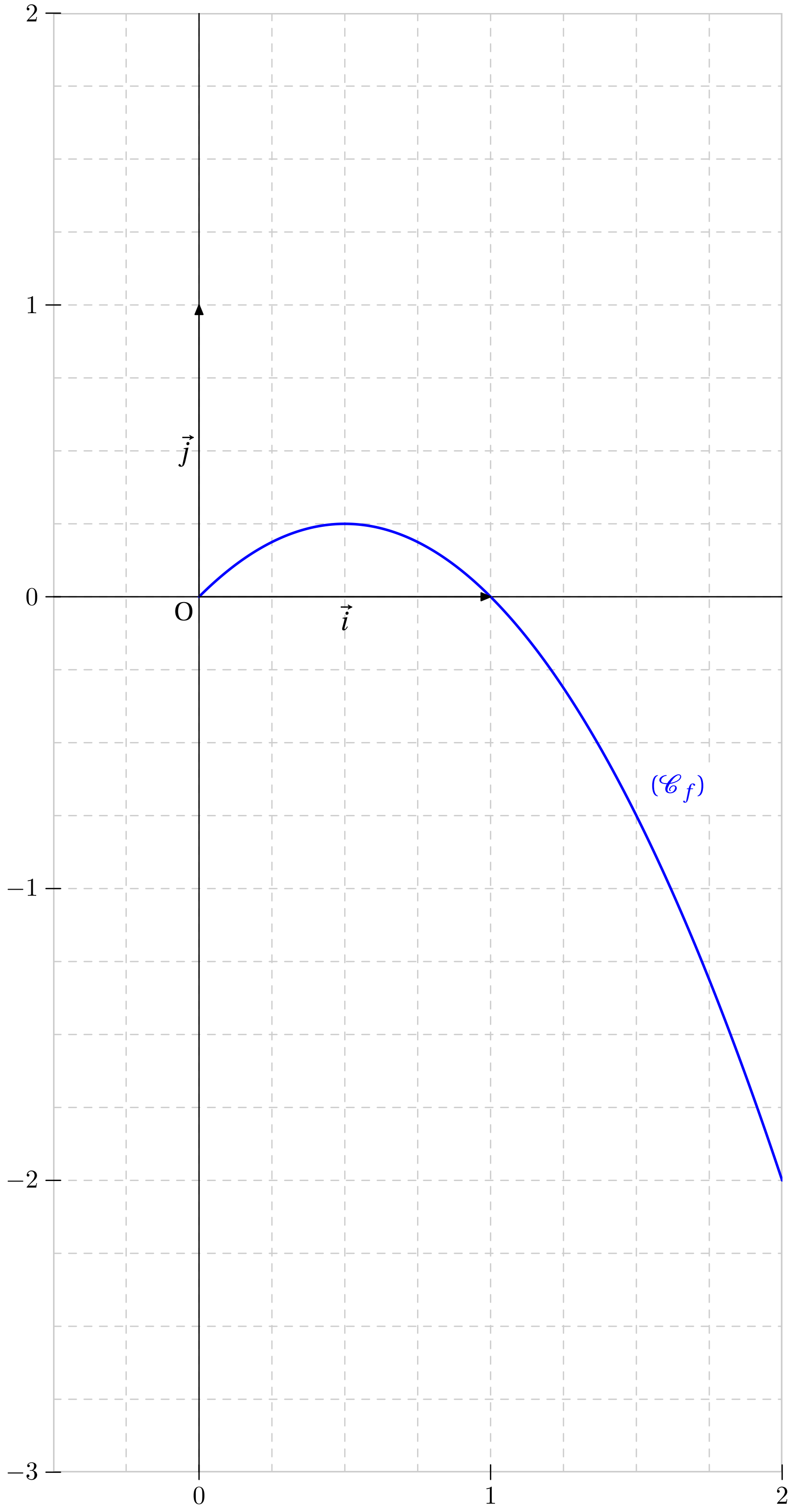


Exercice 37

1) Etudier le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x(1-x)$.

2) En déduire un encadrement de $f(x)$ sur $[0\ ;\ 2]$.

Illustration



Exercice 38

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.
On appelle $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative.

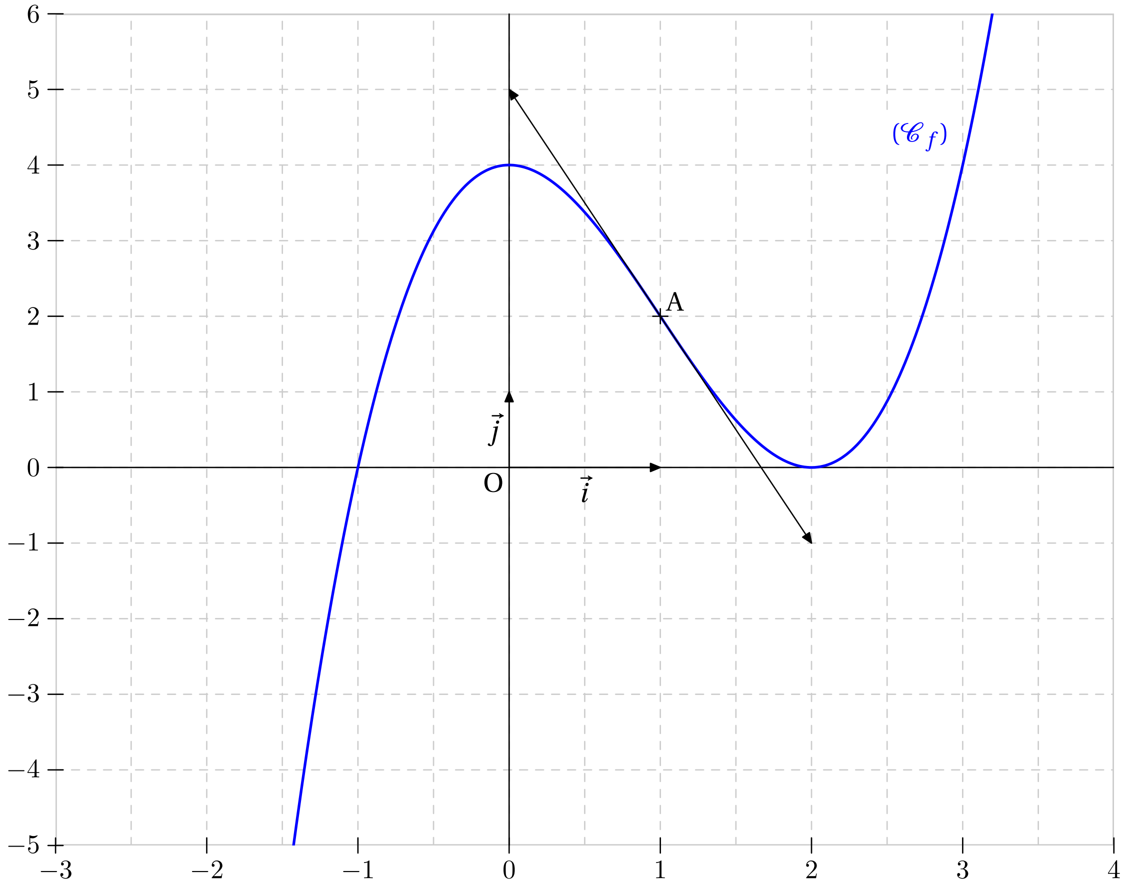
1) Etudier les variations de f.

2) **a)** Déterminer l'équation réduite de la tangente (D) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 1.

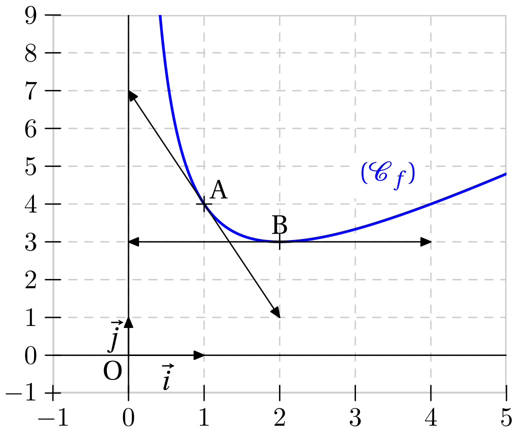
b) Vérifier que $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.
En déduire la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (D).

3) La courbe $(\mathcal{C}_f)$ a-telle un centre de symétrie ? Justifier.

Illustration



Exercice 39



La courbe $(\mathcal{C}_f)$ représentée ci-contre est une partie de la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x}$$

où les coefficients sont à déterminer.

1) Déterminer graphiquement $f(1)$, $f'(1)$, $f(2)$ et $f'(2)$.

2) Déterminer $f'(x)$ en fonction de a, b et c.

3) Montrer que les réels a, b et c vérifient le système : $\begin{cases} a+b+c=4 \\ a-c=-3 \\ 4a-c=0 \end{cases}$.

4) Déterminer l'expression de $f(x)$.

Exercice 40

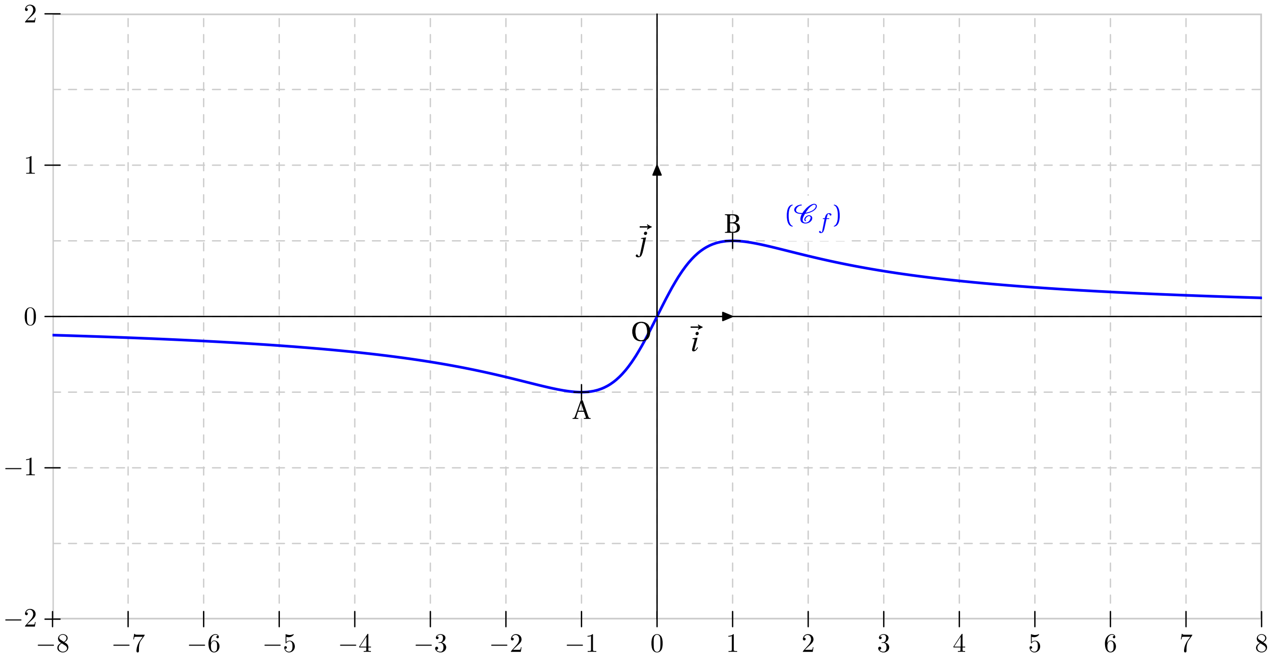
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

1) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

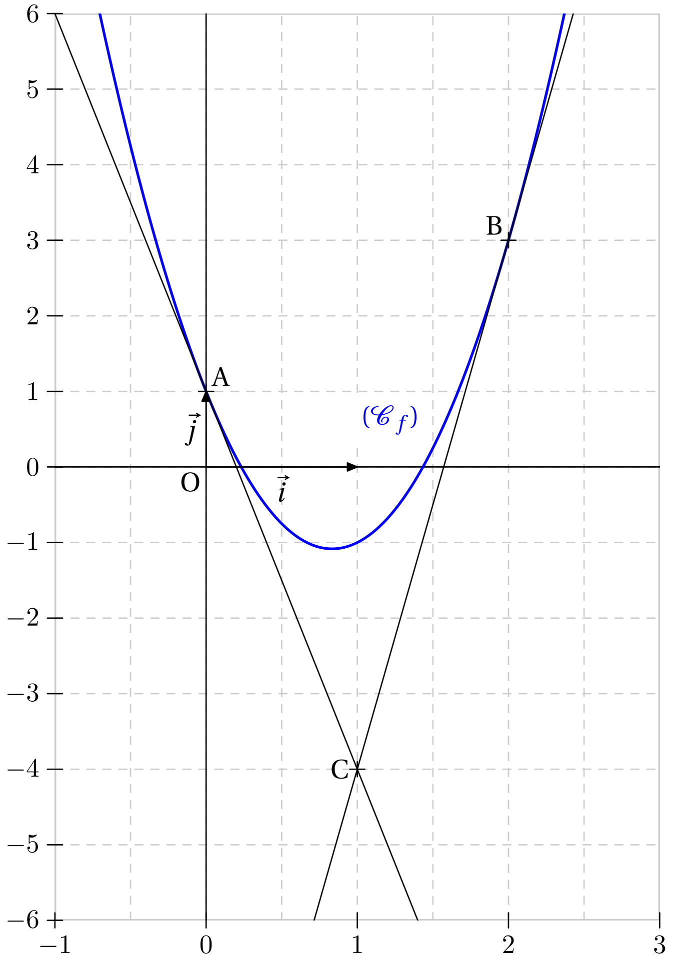
2) Calculer la dérivée f' de f et étudier son signe.

3) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

Illustration



Exercice 41



On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

dont la parabole $(\mathcal{C}_f)$ passe par les points $A(0\ ;\ 1)$ et $B(2\ ;\ 3)$.
Les tangentes en A et B se coupent au point $C(1\ ;\ -4)$.

1) Déterminer une équation des tangentes à $(\mathcal{C}_f)$.
En déduire $f'(0)$ et $f'(2)$.

2) Exprimer $f'(x)$ en fonction de a, b et c.

3) A l'aide des valeurs de $f'(0)$, $f'(2)$ et $f(0)$, trouver trois équations vérifiées par a, b et c puis déterminer l'expression algébrique de la fonction f.

Exercice 42

Tout comme on a pu définir la fonction dérivée d'une fonction f, on peut aussi définir la dérivée seconde de la fonction f que l'on note f''.
f'' est la fonction dérivée de la fonction f'.

Soit n un entier naturel fixé et t un nombre positif.

Le but de l'exercice est de prouver l'inégalité de Bernoulli : $(1+t)^n \geqslant 1 + nt$.

1) Vérifier que l'inégalité est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

2) On suppose $n \geqslant 2$ et on considère sur $[0\ ;\ +\infty[$ la fonction ϕ définie par :

$$\phi(t) = (1+t)^n - 1 - nt.$$

- **a)** Calculer $\phi'(t)$ et $\phi''(t)$.
- **b)** Montrer que pour tout $t \geqslant 0$, on a $\phi'(t) \geqslant 0$.
- **c)** En déduire l'inégalité.

3) Conclure et faire une interprétation graphique de ce résultat pour quelques valeurs de n.

Exercice 43

Exercice 44

Exercice 45

Exercice 46

Exercice 47

Exercice 48

Exercice 49

Exercice 50