Terminale S_4 – exercices sur le calcul intégral

Exercice 1

On considère les intégrales :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\,dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,dx.$$

1. Calculer $I + J$.
2. En utilisant une formule de trigonométrie, calculer $I - J$.
3. En déduire les valeurs exactes de I et J.

Réponses : $I = J = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 2

1. Étudier le signe de $x^2 - 4x + 3$.
2. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^5 \left|x^2 - 4x + 3\right| dx$.

   On pourra utiliser la relation de CHASLES.

Réponse : $I = 8$.

Exercice 3

On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par :

$$f(x) = 3 - x^2 \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - 3x + 4.$$

On note $\mathscr{C}$ et Γ les représentations graphiques de f et g dans le plan muni du repère orthogonal $(O\,;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ avec $\|\vec{\imath}\| = 5\,\text{cm}$ et $\|\vec{\jmath}\| = 3\,\text{cm}$.

1. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à Γ.
2. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine situé entre les deux courbes $\mathscr{C}$ et Γ.

Réponse : l'aire vaut $0{,}625\ \text{cm}^2$.

Exercice 4

On considère la fonction h définie pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;\,-3[$ par :

$$h(x) = \frac{2x+3}{(x+3)^3}.$$

1. Montrer qu'il existe deux nombres réels a et b tels que, pour tout réel $x \in\ ]-\infty\,;\,-3[$:

$$h(x) = \frac{a}{(x+3)^2} + \frac{b}{(x+3)^3}.$$

2. Déterminer une primitive de $x \longmapsto h_1(x) = \dfrac{1}{(x+3)^2}$ et une de $x \longmapsto h_2(x) = \dfrac{1}{(x+3)^3}$ sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-3[$ et en déduire une primitive de h sur $]-\infty\,;\,-3[$.
3. Calculer $I = \displaystyle\int_{-6}^{-4} h(x)dx$.

Réponses : $H(x) = \dfrac{-2}{x+3} + \dfrac{3}{2(x+3)^2}$ et $I = \dfrac{3}{8}$.