Terminales S : corrigé du devoir en classe du 17 avril 2014

EXERCICE 1

1. a. *Probabilité que le volume versé par la machine soit égal à* 260 mL
   X étant une variable aléatoire continue, $P(X = 260) = 0$.

   b. *Probabilité que le volume versé par la machine soit compris entre* 245 mL *et* 285 mL
   On doit calculer $P(245 \leqslant X \leqslant 285)$ où X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(265\ ;\ 10^2\right)$.
   En utilisant une calculatrice, on obtient $P(245 \leqslant X \leqslant 285) = 0{,}954$ à 0,001 près.

   c. *Sachant que le volume versé par la machine est compris entre* 245 mL *et* 285 mL, *probabilité qu'il soit supérieur à* 270 mL
   On pose $A = \{245 \leqslant X \leqslant 285\}$ et $B = \{X \geqslant 270\}$, on doit calculer $P_A(B)$.
   On a $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ avec $A \cap B = \{270 \leqslant X \leqslant 285\}$.
   Avec la calculatrice, on obtient $P_A(B) = 0{,}299$ à 0,001 près.

2. *Nombre réel* a *tel que* $P(X > a) = 0{,}7$
   On cherche a tel que $1 - P(X \leqslant a) = 0{,}7$ c'est-à-dire $P(X \leqslant a) = 0{,}3$.
   Avec la calculatrice, on obtient $a = 260$ mL à 1 mL près.
   Ainsi, 70 % des bouteilles recevront environ plus de 260 mL d'huile.

3. *Calcul du nouvel écart type* σ_1
   X_1 suit la loi normale $\mathcal{N}\left(265\ ;\ \sigma_1^2\right)$.
   D'après l'énoncé, on cherche σ_1 tel que $P(250 \leqslant X_1 \leqslant 280) = 0{,}95$.
   La condition est équivalente à $P\left(\dfrac{250-265}{\sigma_1} \leqslant \dfrac{X_1 - 265}{\sigma_1} \leqslant \dfrac{280-265}{\sigma_1}\right) = 0{,}95$.
   On pose $Y = \dfrac{X_1 - 1{,}5}{\sigma_1}$ et Y suit la loi normale centrée réduite.
   On cherche donc σ_1 tel que $P\left(\dfrac{-15}{\sigma_1} \leqslant Y \leqslant \dfrac{15}{\sigma_1}\right) = 0{,}95$.
   Or, pour tout réel a strictement positif, $P(-a \leqslant Y \leqslant a) = 2\Phi(a) - 1$ où Φ est la fonction définie pour tout réel t par $\Phi(t) = P(Y \leqslant t)$.
   On cherche ainsi σ_1 tel que $2\Phi\left(\dfrac{15}{\sigma_1}\right) - 1 = 0{,}95$ soit $\Phi\left(\dfrac{15}{\sigma_1}\right) = 0{,}975$.
   Soit α tel que $\Phi(\alpha) = 0{,}975$, ainsi $\dfrac{15}{\sigma_1} = \alpha$ d'où $\sigma_1 = \dfrac{15}{\alpha}$.
   Avec la calculatrice, on obtient $\alpha = 1{,}959\,96$ à 10^{-5} près, d'où $\sigma_1 = 7{,}5$ mL à 0,5 mL près.

EXERCICE 2

$\boxed{f(x) = 3x\ln(3x+1) \text{ avec } x \in \left]-\dfrac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[}$

Étude de la proposition 1 : « sur $\left]-\dfrac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$*, l'équation* $f(x) = 3x$ *a une unique solution :* $\dfrac{e-1}{3}$ »

$\boxed{\text{La proposition 1 est fausse.}}$

En effet l'équation $f(x) = 3x$ est équivalente à $3x\ln(3x+1) - 3x = 0$ donc à $3x\left[\ln(3x+1) - 1\right] = 0$.
On obtient $3x = 0$ ou $\ln(3x+1) = 1$ soit $x = 0$ ou $3x + 1 = e$ et ainsi, l'équation $f(x) = 3x$ a deux solutions : 0 et $\dfrac{e-1}{3}$.

Étude de la proposition 2 : « Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse $\frac{1}{3}$ *est égal à* $\frac{3}{2}+\ln 8$ »

$\boxed{\text{La proposition 2 est vraie.}}$

Lorsque f est dérivable en a, le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est égal à $f'(a)$.

Ici, f est dérivable sur $\left]-\frac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$ et pour tout réel $x > -\frac{1}{3}$ on a $f'(x) = 3\ln(3x+1)+\frac{9x}{3x+1}$.

On obtient $f'\left(\frac{1}{3}\right) = 3\ln\left(3\times\frac{1}{3}+1\right)+\frac{9\times\frac{1}{3}}{3\times\frac{1}{3}+1} = 3\ln 2+\frac{3}{2} = \frac{3}{2}+\ln 8.$

Étude de la proposition 3 : « la suite (u_n) *définie pour tout entier* $n \geqslant 1$ *par* $u_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$ *converge vers* 0 »

$\boxed{\text{La proposition 3 est vraie.}}$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{3}{n}\ln\left(\frac{3}{n}+1\right)$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{3}{n}+1\right) = \ln 1 = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

EXERCICE 3

Partie A

$\boxed{g(x) = x^3+3-3\ln x \text{ avec } x \in]0\ ;\ +\infty[}$

1. a. *Dérivée de* g

   La fonction g est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$ on a $g'(x) = 3x^2-\frac{3}{x} = \frac{3x^3-3}{x}$.

   Or, pour tout réel x on a $3(x-1)(x^2+x+1) = \cdots = 3x^3-3$, ainsi, pour tout nombre réel x strictement positif, $g'(x) = \frac{3(x-1)(x^2+x+1)}{x}$.

   b. *Variations de* g

   Pour tout réel $x > 0$ on a $\frac{3(x^2+x+1)}{x} > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $x-1$.

   Ainsi, la fonction g est strictement décroissante sur $]0\ ;\ 1]$ et strictement croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.

2. *Signe de* g

   $g(1) = 4$ et g a un minimum absolu en 1, donc, pour tout réel x strictement positif, $g(x) > 0$.

Partie B

$\boxed{f(x) = \frac{3\ln x}{x}+\frac{1}{2}x^2+1 \text{ avec } x \in]0\ ;\ +\infty[}$

1. *Limites de* f *en* 0 *et en* $+\infty$

   - $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x} = +\infty$ (car $x > 0$) et $\lim\limits_{x\to0}\ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln x}{x} = -\infty$.

     Comme $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{2}x^2+1\right) = 1$ on a $\lim\limits_{x\to0} = -\infty$.

   - $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x^2+1\right) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. a. *Dérivée de* f

La fonction g est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$:

$$f'(x) = 3 \times \frac{\frac{1}{x} \times x + (\ln x) \times 1}{x^2} + \frac{1}{2} \times 2x = \frac{3(1-\ln x)}{x^2} + x = \frac{3 - 3\ln x + x^3}{x^2} = \frac{g(x)}{x}.$$

b. *Variations de* f

Comme $g > 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$, on a $f'(x) > 0$ pour tout $x > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

3. *Position relative de la courbe* C *et de la parabole* P *d'équation* $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$

On étudie le signe de $d(x) = f(x) - \left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Pour tout réel $x > 0$, $d(x) = \frac{3\ln x}{x}$ donc $d(x)$ a le même signe que $\ln x$. Ainsi, on a :

- Pour tout $x > 1$, $d(x) > 0$: la courbe C est au-dessus de P sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.
- Pour tout x tel que $0 < x < 1$, $d(x) < 0$: la courbe C est au-dessous de P sur l'intervalle $]0\ ;\ 1[$.
- $d(1) = 0$: les courbes C et P se coupent au point d'abscisse 1 et d'ordonnée $f(1) = \frac{3}{2}$.

Partie C

$$\boxed{h(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 \text{ avec } x \in]0\ ;\ +\infty[}$$

2. a. *Dérivée de* h

La fonction h est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$ on a :

$$h'(x) = \frac{1}{2} \times 2 \times (\ln x) \times \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x}.$$

b. *Aire de D*

Comme sur $]1\ ;\ +\infty[$ la courbe C est au-dessus de P, l'aire de D, en unités d'aire est :

$$\text{aire}(D) = \int_1^e \left[f(x) - \left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right)\right] \, dx = \int_1^e \frac{3\ln x}{x} \, dx = 3\int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx.$$

D'après la question précédente, une primitive de $x \longmapsto \frac{\ln x}{x}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ est h donc :

$$\text{aire}(D) = 3\left[h(e) - h(1)\right] = 3\left[\frac{1}{2}(\ln e)^2 - (\ln 1)^2\right] = 3\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{3}{2} \text{ unités d'aire.}$$

QUESTION 1 DE LA PARTIE C

Représentation du domaine D