Terminale S_4 – corrigé du devoir à la maison n° 9

EXERCICE 1

$A(1\ ;\ 2\ ;\ 2)$, $B(3\ ;\ 2\ ;\ 1)$ et $C(1\ ;\ 3\ ;\ 3)$

1. a. *Plan* (ABC)

   Pour justifier que les points A, B, C déterminent un plan, il suffit de démontrer que ces points sont non alignés, c'est-à-dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

   b. *Vecteur normal au plan* (ABC)

   Le vecteur $\vec{n}$, non nul, de coordonnées $(\alpha\ ;\ \beta\ ;\ \gamma)$ est un vecteur normal au plan (ABC) si, et seulement si $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ et $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$, c'est-à-dire si, et seulement si $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

   En traduisant ces conditions analytiquement, on obtient $\gamma = 2\alpha$ et $\beta = -2\alpha$ avec $\alpha \neq 0$.

   Ainsi, en choisissant $\alpha = 1$, un vecteur normal au plan (ABC) est le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(1\ ;\ -2\ ;\ 2)$.

   c. *Équation cartésienne du plan* (ABC)

   D'après ce qui précède, un équation cartésienne du plan (ABC) est $x - 2y + 2z + h = 0$, où h est un nombre réel.

   Comme A est un point du plan (ABC), on obtient $h = -1$, ainsi, un équation cartésienne du plan (ABC) est $x - 2y + 2z - 1 = 0$.

2. P_1 d'équation $x - 2y + 2z - 1 = 0$ et P_2 d'équation $x - 3y + 2z + 2 = 0$

   a. *Position relative de* P_1 *et* P_2

   On peut remarquer que P_1 est le plan (ABC).

   Le plan P_1 a pour vecteur normal $\vec{n}_1 = \vec{n}$ de coordonnées $(1\ ;\ -2\ ;\ 2)$ et le plan P_2 a pour vecteur normal $\vec{n}_2$ de coordonnées $(1\ ;\ -3\ ;\ 2)$.

   Les triplets des coordonnées de $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas proportionnels, ainsi P_1 et P_2 ne sont pas parallèles donc P_1 et P_2 sont sécants.

   On pose $\Delta = P_1 \cap P_2$.

   b. *Position du point* C *par rapport à la droite* Δ

   $C \in P_1$ car $P_1 = (ABC)$.

   De plus, $x_C - 3y_C + 2z_C + 2 = 1 - 3\times 3 + 2\times 3 + 2 = 9 - 9 = 0$ donc $C \in P_2$, ainsi $C \in P_1 \cap P_2 = \Delta$.

   c. *Vecteur directeur de la droite* Δ

   Le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $(2\ ;\ 0\ ;\ -1)$.

   - $\vec{u} \cdot \vec{n}_1 = 2 \times 1 + 0 \times (-2) + (-1) \times 2 = 2 - 2 = 0$.
     Ainsi la droite passant par le point C est de vecteur directeur $\vec{u}$ est parallèle à P_1, mais comme C est un point de P_1, cette droite est contenue dans P_1.
   - De la même façon, la droite passant par le point C est de vecteur directeur $\vec{u}$ est parallèle à P_2, mais comme C est un point de P_2, cette droite est contenue dans P_2.

   Comme cette droite est contenue dans P_1 et P_2 qui sont sécants selon Δ, la droite passant par C et de vecteur directeur $\vec{u}$ est la droite Δ.

   Donc, le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(2\ ;\ 0\ ;\ -1)$ est un vecteur directeur de la droite Δ.

   d. *Représentation paramétrique de la droite* Δ

   On utilisant les résultats précédents, on obtient $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 \\ z = 3 - t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

3. a. *Valeur de* k *pour que les vecteurs* $\overrightarrow{AM}$ *et* $\vec{u}$ *soient orthogonaux*

   M est le point de la droite Δ de paramètre k donc M a pour coordonnées $(1+2k\ ;\ 3\ ;\ 3-k)$.

   Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(2k\ ;\ 1\ ;\ 1-k)$.

   Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux si, et seulement si $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM}=0$, soit, si, et seulement si, $2\times 3k+0\times 1+(-1)\times(1-k)=0$. Après résolution, on obtient $k=\dfrac{1}{5}$.

   b. *Distance du point* A *à la droite* Δ

   D'après la question précédente, le projeté orthogonal du point A sur la droite Δ, est le point H de la droite Δ qui correspond au paramètre $k=\dfrac{1}{5}$.

   Ainsi, H a pour coordonnées $\left(\dfrac{7}{5}\ ;\ 2\ ;\ \dfrac{14}{5}\right)$.

   La distance du point A à la droite Δ est égale à AH et on a :

$$AH=\sqrt{\left(\frac{7}{5}-1\right)^2+(3-2)^2+\left(\frac{14}{5}-2\right)^2}=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

EXERCICE 2 (sujet E page 288)

A(3 ; −2 ; 2), B(6 ; 1 ; 5), C(6 ; −2 ; −1) et D(0 ; 4 ; −1)

Partie A

1. *Nature du triangle* ABC

   Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(3\ ;\ 3\ ;\ 3)$ et celle du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(3\ ;\ 0\ ;\ -3)$.

   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\times 3+3\times 0+3\times(-3)=9-9=0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux (et non nuls), le triangle ABC est un triangle rectangle en A.

2. *Caratérisation du plan* $\mathscr{P}$ *d'équation* $x+y+z-3=0$

   Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

   Comme $\overrightarrow{AB}=3\vec{n}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, donc $(AB)\perp\mathscr{P}$.

   On a $x_A+y_A+z_A-3=3-2+2-3=0$ donc $A\in\mathscr{P}$.

   Ainsi, $\mathscr{P}$ est le plan orthogonal à la droite (AB) passant par le point A.

3. *Équation cartésienne du plan* $\mathscr{P}'$ *orthogonal à la droite* (AC) *passant par le point* A

   Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}'$ est le vecteur $\overrightarrow{AC}$ de corrdonnées $(3\ ;\ 0\ ;\ 3)$, ainsi le plan $\mathscr{P}'$ a pour équation $3x-3z+h=0$ où h est un nombre réel.

   Comme ce plan passe par le point A on a $3\times 3-3\times 2+h=0$ d'où $h=-3$.

   Ainsi une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}'$ est $3x-3z-3=0$ ou $x-z-1=0$.

Partie B

1. *Position de la droite* (AD) *par rapport au plan* (ABC)

   Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées $(-3\ ;\ 6\ ;\ 3)$.

   On a $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=-3\times 3+6\times 3+(-3)\times 3=-9+18-9=0$, donc $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$.

   De même, $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=-3\times 3+6\times 0+(-3)\times(-3)=-9+9=0$, donc $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AC}$.

   Ainsi, la droite (AD) est orthogonale à deux droites sécantes, (AB) et (AC), du plan (ABC), donc la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).

2. *Calcul du volume du tétraèdre* ABCD

   D'après la question précédente, la hauteur relative à la face ABC du tétraèdre ABCD est AD, donc volume$(\mathrm{ABCD}) = \dfrac{\text{aire}(\mathrm{ABC}) \times \mathrm{AD}}{3}$.

   Pour les questions suivantes, les longueurs seront exprimées en unités de longueur, les aires en unités d'aire, et les volumes en unités de volume.

   On obtient $\mathrm{AB} = 3\sqrt{3}$, $\mathrm{AC} = 2\sqrt{2}$, aire$(\mathrm{ABC}) = \dfrac{9\sqrt{6}}{2}$ et $\mathrm{AD} = 3\sqrt{6}$ et finalement :

   $$\text{volume}(\mathrm{ABCD}) = \frac{1}{3} \times \frac{9\sqrt{6}}{2} \times 3\sqrt{6} = 27.$$

3. *Calcul de l'angle géométrique* $\widehat{\mathrm{BDC}}$

   On utilise la formule : $\cos\left(\widehat{\mathrm{BDC}}\right) = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{DB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DC}}}{\mathrm{DB} \times \mathrm{DC}}$.

   On obtient $\overrightarrow{\mathrm{DB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DC}} = 54$, $\mathrm{DB} = 9$ et $\mathrm{DC} = 6\sqrt{2}$ d'où $\cos\left(\widehat{\mathrm{BDC}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

   Ainsi, $\widehat{\mathrm{BDC}} = \dfrac{\pi}{4}$ (en radians).

4. a. *Calcul de l'aire du triangle* BCD

   $$\text{Aire}(\mathrm{BCD}) = \frac{\mathrm{DB} \times \mathrm{DC} \times \sin\left(\widehat{\mathrm{BDC}}\right)}{2} = \frac{1}{2} \times 9 \times 6\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 27.$$

   b. *Calcul de* AH, H *étant le point d'intersection du plan* (BCD) *avec sa perpendiculaire passant par* A

   D'après la définition du point H, AH est la hauteur relative à la face BCD du tétraèdre ABCD, ainsi, volume$(\mathrm{ABCD}) = \dfrac{\text{aire}(\mathrm{BCD}) \times \mathrm{AH}}{3}$. On a donc :

   $$\mathrm{AH} = \frac{3 \times \text{volume}(\mathrm{ABCD})}{\text{aire}(\mathrm{BCD})} = \frac{3 \times 27}{27} = 3.$$