Terminales S (enseignement de spécialité)
Devoir en classe n^{o} 4
Mardi 1er avril 2014

EXERCICE 1

1. (*Restitution organisée de connaissances*)
Prérequis : x *et* y *sont des entiers relatifs non nuls. Pour tout entier naturel* k *non nul :*

$$\text{PGCD}(kx\,;\,ky) = k \times \text{PGCD}(x\,;\,y).$$

En utilisant ce prérequis, démontrer que l'entier naturel d non nul est le PGCD de deux entiers relatifs non nuls x et y si, et seulement si, il existe deux entiers relatifs x' et y' premiers entre eux tels que $x = dx'$ et $y = dy'$.

2. Déterminer tous les couples $(x\,;\,y)$ d'entiers naturels, avec $x \leqslant y$, vérifiant :

$$xy = 3\,468 \text{ et } \text{PGCD}(x\,;\,y) = 17.$$

EXERCICE 2

Dans tout l'exercice, n désigne un entier relatif quelconque.
On considère les entiers relatifs a et b définis par :

$$a = n^3 - 2n + 5 \text{ et } b = n + 1.$$

1. Vérifier que pour tout entier relatif n :

$$a = (n^2 - n - 1)b + 6.$$

2. Démontrer que $\text{PGCD}(a\,;\,b) = \text{PGCD}(b\,;\,6)$.
3. Pour quelles valeurs de n a-t-on $\text{PGCD}(a\,;\,b) = 3$?
4. Pour quelles valeurs de n, $\dfrac{a}{b}$ est une fraction irréductible ?
5. *Question bonus :* déterminer les valeurs de n pour lesquelles $\dfrac{a}{b}$ est un entier relatif.

EXERCICE 3

1. Pour $a = 2$, puis pour $a = 3$, déterminer un entier naturel n non nul tel que $a^n \equiv 1 \pmod 7$.
2. À tout entier naturel n, on associe le nombre $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$.
Montrer que $A_{2\,014} \equiv 6 \pmod 7$.