Exercice 2 (10 *points*)

On considère un système physique dont l'état est modélisé par la fonction y de la variable réelle t, solution de l'équation différentielle :

$$y''(t)+4y(t)=e(t) \qquad \textbf{(1)},$$

où la fonction e représente une contrainte extérieure au système.

Partie A

Dans cette partie, on suppose que $e(t)=20$ pour tout nombre réel t.
L'équation différentielle (1) s'écrit alors sous la forme :

$$y''(t)+4y(t)=20 \qquad \textbf{(2)}.$$

1. Déterminer la fonction constante h solution particulière de l'équation différentielle **(2)**.

2. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle **(2)**.

3. En déduire l'expression de la fonction f solution de l'équation différentielle **(2)** qui vérifie les conditions $f(0)=0$ et $f'(0)=0$.

Partie B

Dans cette partie, on étudie un moyen d'amener le système vers un état d'équilibre de manière « lisse ».
À cette fin, on soumet le système à une contrainte extérieure modélisée par la fonction e définie par :

$$e(t)=8tU(t)-8(t-\tau)U(t-\tau),$$

où τ désigne un nombre réel strictement positif.

On rappelle que la fonction échelon unité U est définie par :

$$\begin{cases} U(t)=0 & \text{si } t<0 \\ U(t)=1 & \text{si } t\geq 0 \end{cases}.$$

Une fonction définie sur **R** est dite causale si elle est nulle sur l'intervalle $]-\infty;0[$.

On appelle g la fonction causale telle que :

$$g''(t)+4g(t)=e(t)$$

et vérifiant :

$$g(0)=0 \text{ et } g'(0)=0.$$

On note $G(p)$ la transformée de Laplace de la fonction g et $E(p)$ la transformée de Laplace de la fonction e.

1. Exprimer $E(p)$ en fonction de p et de τ.

2. En déduire que :

$$G(p)=\frac{8}{p^2\left(p^2+4\right)}\left(1-\mathrm{e}^{-\tau p}\right).$$

3. Déterminer les constantes réelles A et B telles que :

$$\frac{8}{p^2\left(p^2+4\right)}=\frac{A}{p^2}+\frac{B}{p^2+4}.$$

4. Déterminer alors l'original de $\frac{8}{p^2\left(p^2+4\right)}$.

5. En déduire que, pour tout nombre réel t :

$$g(t)=g_0(t)-g_0(t-\tau) \qquad \text{avec } g_0(t)=\left(2t-\sin(2t)\right)U(t).$$

6. Montrer que pour $t\geq\tau$, on a :

$$g(t)=2\tau-\sin(2t)+\sin(2t-2\tau).$$

7. On suppose maintenant que $\tau=\pi$.

a) Simplifier l'expression de $g(t)$ pour $t\geq\tau$.

b) La courbe représentative de la fonction e, pour $\tau=\pi$, est tracée sur la figure du **document réponse n°2.**

Sur le même graphique, tracer la courbe représentative de la fonction g.

Document réponse n°2, à rendre avec la copie (exercice 2)