Exercice - 1

Dans le plan complexe $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité 2 cm, on considère les points M d'affixe z, M_1 d'affixe $\overline{z}$, A d'affixe 2 et B d'affixe 1.

Soit f l'application de $\mathcal{P}$ privé de A dans $\mathcal{P}$, qui à tout point M d'affixe z associe le point M$'$ d'affixe z' telle que $z' = \dfrac{\overline{z}+4}{\overline{z}-2}$.

1. Déterminer les points invariants par f.

2. Soit C le point d'affixe $2\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$.
Montrer que C$'$ est le milieu du segment [OC].

3. **a)** Calculer pour tout $z \neq 2$, le produit $(\overline{z}-2)(z'-1)$.

b) En déduire :

- la valeur de $\mathrm{AM}_1 \cdot \mathrm{BM}'$;
- une expression de $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{BM}'}\right)$ en fonction de $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AM}_1}\right)$.

c) Justifier les relations :

(1) $\mathrm{AM} \cdot \mathrm{BM}' = 6$;

(2) $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{BM}'}\right) = \left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AM}}\right)$.

d) Application : construire l'image D$'$ du point D d'affixe $2+2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

Exercice - 2

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.

1. Vérifier que $F : x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

2. En déduire le calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice - 3

Partie A : Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x+1).$$

1. **a)** Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

b) L'axe des abscisses est-il tangent à la courbe $(\mathcal{C})$ au point O ?

2. On pose $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

a) Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \neq -1$,

$$\frac{x^2}{x+1} = ax+b+\frac{c}{x+1}.$$

b) Calculer I.

3. A l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu à la question **2**, calculer, en unités d'aires, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations $x=0$, $x=1$ et $y=0$.

4. Tracer la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

5. Montrer que l'équation $f(x) = 0,25$ admet une seule solution sur l'intervalle $[0\,;1]$. On note α cette solution. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B : Etude d'une suite

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\ln(x+1)\,\mathrm{d}x$.

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
La suite (u_n) converge-t-elle ?

2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\ln 2}{n+1}$.
En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice - 1

Dans le plan complexe $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité 2 cm, on considère les points M d'affixe z, M_1 d'affixe $\overline{z}$, A d'affixe 2 et B d'affixe 1.

Soit f l'application de $\mathcal{P}$ privé de A dans $\mathcal{P}$, qui à tout point M d'affixe z associe le point M$'$ d'affixe z' telle que $z' = \dfrac{\overline{z}+4}{\overline{z}-2}$.

1. Déterminer les points invariants par f.
2. Soit C le point d'affixe $2\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$.
   Montrer que C$'$ est le milieu du segment [OC].
3. a) Calculer pour tout $z \neq 2$, le produit $(\overline{z}-2)(z'-1)$.
   b) En déduire :
      - la valeur de $\mathrm{AM}_1 \cdot \mathrm{BM}'$;
      - une expression de $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{BM}'}\right)$ en fonction de $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AM}_1}\right)$.

   c) Justifier les relations :
      (1) $\mathrm{AM} \cdot \mathrm{BM}' = 6$;
      (2) $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{BM}'}\right) = \left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AM}}\right)$.

   d) Application : construire l'image D$'$ du point D d'affixe $2+2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

Exercice - 2

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.

1. Vérifier que $F : x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.
2. En déduire le calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice - 3

Partie A : Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x+1).$$

1. a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
   b) L'axe des abscisses est-il tangent à la courbe $(\mathcal{C})$ au point O ?
2. On pose $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x$.
   a) Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \neq -1$,
   $$\frac{x^2}{x+1} = ax+b+\frac{c}{x+1}.$$
   b) Calculer I.
3. A l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu à la question **2**, calculer, en unités d'aires, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations $x=0$, $x=1$ et $y=0$.
4. Tracer la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0,25$ admet une seule solution sur l'intervalle $[0\,;1]$. On note α cette solution. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B : Etude d'une suite

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\ln(x+1)\,\mathrm{d}x$.

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
   La suite (u_n) converge-t-elle ?
2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\ln 2}{n+1}$.
   En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 1

• Complexes, interprétation géométrique

Dans le plan complexe $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O,\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ d'unité 2 cm, on considère les points M d'affixe z, M_1 d'affixe $\overline{z}$, A d'affixe 2 et B d'affixe 1. Soit f l'application de $\mathcal{P}$ privé de A dans $\mathcal{P}$, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \dfrac{\overline{z}+4}{\overline{z}-2}$.

1. *Déterminer les points invariants par f.* On résout l'équation :

$$\begin{aligned} z' = z &\iff \frac{\overline{z}+4}{\overline{z}-2} = z \\ &\iff \overline{z}+4 = z\left(\overline{z}-2\right) \\ &\iff \overline{z}+4 = z\overline{z}-2z \\ &\iff 2z+\overline{z}+4-|z|^2 = 0. \end{aligned}$$

En posant $z = a+ib$, a et b réel, on a :

$$\begin{aligned} z' = z &\iff 2\left(a+\mathrm{i}b\right)+a-\mathrm{i}b+4-a^2-b^2 = 0 \\ &\iff -a^2-b^2+3a+4+\mathrm{i}b = 0 \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} -a^2-b^2+3a+4 &=& 0 \\ b &=& 0 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} -a^2+3a+4 &=& 0 \\ b &=& 0 \end{array}\right. \end{aligned}$$

On résout alors : $-a^2+3a+4 = 0$, en calculant :
$\Delta = 9+16 = 25 = 5^2$, d'où deux solutions : $a_1 = 4$ ou $a_2 = -1$.

> Finalement puisque $b = 0$, on obtient comme points fixes, les points d'affixe 4 et -1.

2. *Soit C le point d'affixe $2\left(1+i\sqrt{3}\right)$. Montrer que C' est le milieu du segment [OC].* Le milieu du segment [OC] a pour affixe : $\dfrac{0+2\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)}{2} = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$.

D'autre part, le point C$'$ a pour affixe :

$$\begin{aligned} z_{\mathrm{C}'} &= \frac{\overline{z_{\mathrm{C}}}+4}{\overline{z_{\mathrm{C}}}-2} \\ &= \frac{2-2\mathrm{i}\sqrt{3}+4}{2-2\mathrm{i}\sqrt{2}-2} \\ &= \frac{6-2\mathrm{i}\sqrt{3}}{2\mathrm{i}\sqrt{3}} \\ &= \frac{3\mathrm{i}\sqrt{3}+3}{3} \\ &= 1+\mathrm{i}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

> C$'$ est le milieu du segment [OC].

3. a. *Calculer pour tout $z \neq 2$, le produit $\left(\overline{z}-2\right)\left(z'-1\right)$.* On a, pour tout $z \neq 2$:

$$\begin{aligned} \left(\overline{z}-2\right)\left(z'-1\right) &= \left(\overline{z}-2\right)\left(\frac{\overline{z}+4}{\overline{z}-2}-1\right) \\ &= \left(\overline{z}-2\right)\left[\frac{\overline{z}+4-\left(\overline{z}-2\right)}{\overline{z}-2}\right] \\ &= \left(\overline{z}-2\right)\times\frac{6}{\overline{z}-2} \\ &= 6. \end{aligned}$$

> $\left(\overline{z}-2\right)\left(z'-1\right) = 6.$

b. *En déduire :*

► *la valeur de $AM_1 \cdot BM'$;* on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{AM}_1\cdot\mathrm{BM}' &= \left|z_{\mathrm{M}_1}-z_{\mathrm{A}}\right|\cdot\left|z_{\mathrm{M}'}-z_{\mathrm{B}}\right| \\ &= \left|\overline{z}-2\right|\cdot\left|z'-1\right| \\ &= \left|\left(\overline{z}-2\right)\left(z'-1\right)\right| \\ &= 6. \end{aligned}$$

► *une expression de $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{BM'}\right)$ en fonction de $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{AM_1}\right)$.*

On a :

$$\begin{aligned} \arg\left[\left(\overline{z}-2\right)\left(z'-1\right)\right] &= \arg(6)\ [2\pi] \\ \iff& \arg\left(\overline{z}-2\right)+\arg\left(z'-1\right) = 0\ [2\pi] \\ \iff& \arg\left(z'-1\right) = -\arg\left(\overline{z}-2\right)\ [2\pi] \\ \iff& \left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{BM}'}\right) = -\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AM}_1}\right)\ [2\pi]. \end{aligned}$$

> Finalement, $\mathrm{AM}_1\cdot\mathrm{BM}' = 6$ et $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{BM}'}\right) = -\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AM}_1}\right)\ [2\pi]$

c. *Justifier les relations :*

(1) $AM\cdot BM' = 6$; • Rappel : $\forall z \in \mathbb{C}, |\overline{z}| = |z|$.

On a : $$\begin{aligned} \mathrm{AM} &= \left|z-z_A\right| = |z-2| \\ &= \left|\overline{z-2}\right| \\ &= \left|\overline{z}-2\right| \\ &= \mathrm{AM}_1. \end{aligned}$$

> Donc : $\mathrm{AM}\cdot\mathrm{BM}' = \mathrm{AM}_1\cdot\mathrm{BM}' = 6$.

(2) $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{BM'}\right) = \left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{AM}\right)$.

• Rappel : $\forall z \in \mathbb{C}, \arg\left(\overline{z}\right) = -\arg(z)$.

On a : $$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AM}}\right) &= \arg\left(z-z_A\right) = \arg(z-2)\ \ [2\pi] \\ &= -\arg\left(\overline{z-2}\right)\ \ [2\pi] \\ &= -\arg\left(\overline{z}-2\right)\ \ [2\pi] \\ &= -\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AM}_1}\right)\ \ [2\pi]. \end{aligned}$$

> Donc : $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{BM}'}\right) = \left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AM}}\right)\ [2\pi]$.

d. *Application : construire l'image D' du point D d'affixe $2+2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$.* Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ a pour affixe : $2+2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}-2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

De $\mathrm{AM}\cdot\mathrm{BM}' = 6$, on tire : $\mathrm{BM}' = \dfrac{6}{\mathrm{AM}} = \dfrac{6}{2} = 3$.

Donc M$'$ est sur le cercle de centre A et de rayon 3.

D'autre part $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AM}}\right) = \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$ d'où $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{BM}'}\right) = \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$

> On place donc D$'$ sur le cercle de centre A et de rayon 3 tel que $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{BM}'}\right) = \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

Exercice 2

• Calcul d'intégrale

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.

1. *Vérifier que $F : x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.*

F est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}+(x+1)\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{F \text{ est une primitive de } f \text{ sur }]0\,;+\infty[.}$

2. *En déduire le calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$.* On a donc :

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x &= [F(x)]_1^2 \\ &= F(2)-F(1) \\ &= 3\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}-2\mathrm{e}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}-2\mathrm{e}^{-1} = \frac{3}{\sqrt{\mathrm{e}}}-\frac{2}{\mathrm{e}}.}$$

Partie A : Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x+1)$.

1. a. *Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.*

f est définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$, et :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1\times\ln(x+1)+x\times\frac{1}{x+1} \\ &= \ln(x+1)+\frac{x}{x+1}. \end{aligned}$$

- ► $\forall x\in[0\,;+\infty[: x+1\geqslant 1$ donc $\ln(x+1)\geqslant 0$
- ► $\forall x\in[0\,;+\infty[: \dfrac{x}{x+1}\geqslant 0$

Finalement, $f'(x)\geqslant 0$, pour tout x de $[0\,;+\infty[$, comme somme de deux nombres postitifs.

$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [0\,;+\infty[}$.

b. *L'axe des abscisses est-il tangent à la courbe $(\mathcal{C})$ au point O ?*

Autrement dit : la tangente en 0 à la courbe est-elle horizontale, ie, a-t-on $f'(0)=0$.

$$f'(0) = \ln(0+1)+\frac{0}{0+1}=0.$$

Donc : $\boxed{\text{l'axe des abscisses est tangent à la courbe } (\mathcal{C}) \text{ au point O}}$

2. *On pose $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$.*

a. *Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x\neq -1$, $\dfrac{x^2}{x+1}=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$.* On a :

$$\begin{aligned} ax+b+\frac{c}{x+1} &= \frac{ax(x+1)+b(x+1)+c}{x+1} \\ &= \frac{ax^2+ax+bx+b+c}{x+1} \\ &= \frac{ax^2+(a+b)x+(b+c)}{x+1} = \frac{x^2}{x+1} \end{aligned}$$

On a donc, par identification :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a &=& 1 \\ a+b &=& 0 \\ b+c &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcr} a &=& 1 \\ b &=& -1 \\ c &=& 1 \end{array}\right.$$

Ainsi : $\boxed{\dfrac{x^2}{x+1}=x-1+\dfrac{1}{x+1}.}$

b. *Calculer I.* On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2-x+\ln(x+1)\right]_0^1 \quad \text{car } x+1>0, \forall x\in[0\,;+\infty[\\ &= \left(\frac{1}{2}1^2-1+\ln(1+1)\right)-\left(\frac{1}{2}0^2-0+\ln(0+1)\right) \end{aligned}$$

$\boxed{I=-\dfrac{1}{2}+\ln 2.}$

3. *A l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu à la question 2, calculer, en unités d'aires, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations $x=0$, $x=1$ et $y=0$.*

La courbe est au-dessus de l'axe des abscisses pour tout réel compris entre 0 et 1, donc :

$$\mathcal{A} = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x.$$

On pose : $u(x)=\ln(x+1)$ $\quad u'(x)=\dfrac{1}{x+1}$

$v'(x)=x$ $\quad v(x)=\dfrac{1}{2}x^2$.

Les fonctions u et v sont deux fois dérivables, ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^1 x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x+1)\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{1}{2}1^2\ln(1+1)\right)-\left(\frac{1}{2}0^2\times\ln(0+1)\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\ln 2\right) \\ &= \frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{4}-\frac{\ln 2}{2} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathcal{A}=\dfrac{1}{4}\ ua.}$

4. *Tracer la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de f dans un repère orthogonal $\left(O,\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.*

5. *Montrer que l'équation $f(x)=0,25$ admet une seule solution sur l'intervalle $[0\,;1]$. On note α cette solution. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.*

- ► f est dérivable donc continue sur $[0\,;1]$;
- ► f est croissante sur $[0\,;1]$;
- ► $f(0)=0<0,25$ et $f(1)=\ln 2>0,25$.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique α tel que : $f(\alpha)=0,25$.

De plus, $f(0,56)\simeq 0,249$ et $f(0,57)\simeq 0,257$ donc :

$$\boxed{0,56<\alpha<0,57.}$$

Partie B : Etude d'une suite

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=\displaystyle\int_0^1 x^n\ln(x+1)\,dx$.

1. *Déterminer le sens de variation de la suite (u_n). La suite (u_n) converge-t-elle ?*

Sur l'intervalle $[0\,;1]$, on a $0\leqslant x\leqslant 1$ donc :

$$0\leqslant x\times x^n\leqslant x^n \text{ et } 0\leqslant x^{n+1}\leqslant x^n.$$

De plus $x+1\geqslant 1$ donc $\ln(x+1)\geqslant 0$ d'où :

$$0\leqslant x^{n+1}\ln(x+1)\leqslant x^n\ln(x+1)$$

et ainsi $0\leqslant\displaystyle\int_0^1 x^{n+1}\ln(x+1)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x^n\ln(x+1)\,\mathrm{d}x$ et :

$$0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$$

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc décroissante et minorée par 0 elle est donc convergente.}}$

2. *Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $0\leqslant u_n\leqslant\dfrac{\ln 2}{n+1}$. En déduire la limite de la suite (u_n).*

Sur l'intervalle $[0\,;1]$, $\ln 1\leqslant\ln(x+1)\leqslant\ln 2$ d'où :

$$0\leqslant x^n\ln(x+1)\leqslant x^n\ln 2$$

et $0\leqslant\displaystyle\int_0^1 x^n\ln(x+1)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x^n\ln 2\,\mathrm{d}x$, ainsi :

$$0\leqslant u_n\leqslant\ln 2\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$$

Or $\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$, donc : $\boxed{0\leqslant u_n\leqslant\dfrac{\ln 2}{n+1}}$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$, d'où en appliquant le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=0.}$$