Annexe 3

PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE (CLASSES DE PREMIÈRE ET DE SECONDE ANNÉES)

I - OBJECTIFS DE FORMATION

L'objectif de l'enseignement des mathématiques en BCPST est double.
D'une part il contribue à l'approfondissement de la culture scientifique générale en donnant aux étudiants un accès à quelques domaines fondamentaux (algèbre linéaire, analyse, probabilités). La pratique du raisonnement mathématique concourt ici comme ailleurs à la formation de l'esprit d'un futur scientifique ; la rigueur du raisonnement, l'esprit critique, le contrôle et l'analyse des hypothèses, le sens de l'observation et celui de la déduction trouvent en mathématiques un champ d'action où ils seront cultivés de manière spécifique.
D'autre part, il contribue à fournir des représentations et un langage dont les autres disciplines scientifiques étudiées dans ces classes et au-delà sont demandeuses ou utilisatrices. De là l'importance d'une cohérence et d'une coordination aussi bonnes que possible entre les diverses disciplines : il importe d'éviter les redondances tout en soulignant les points communs, de limiter les divergences ou ambiguïtés dues à la diversité des points de vue possibles sur un même objet tout en enrichissant l'enseignement par cette même diversité.
L'objectif n'est pas de former des professionnels des mathématiques, mais des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques dans diverses situations, et capables de dialoguer avec des mathématiciens dans le cadre de leur futur métier.

II - PROGRAMME

Préambule

La réforme des lycées, entamée en 1999, impose une relecture des programmes ; les modifications introduites dans ce texte ne concernent pas les choix fondamentaux ; dans cette mesure, il s'agit essentiellement d'une mise à jour et non d'un nouveau programme.
Le niveau de référence à l'entrée de la filière BCPST est celui de l'enseignement obligatoire de la classe terminale scientifique.
Le programme se situe dans la continuité de ceux du lycée et de la série S.
Un effort important avait été accompli en 1995 pour permettre de simplifier la présentation des objets mathématiques rencontrés dans ce programme ; il a été poursuivi. À la lumière de l'expérience acquise, certains points ont été précisés (lorsque la mise en œuvre révélait quelque ambiguïté) ou au contraire élargis (lorsque les mises en garde ou les précisions se sont révélées superflues ou trop contraignantes). Les développements formels ou trop théoriques doivent être évités. Une place importante doit être faite aux applications, exercices, problèmes, en relation chaque fois que cela est possible avec les enseignements de physique, de chimie, de biologie et de sciences de la terre, en évitant les situations artificielles ainsi que les exercices de pure virtuosité technique.
La démonstration d'un énoncé suivi de la mention " résultat admis " n'est pas au programme. Dans quelques cas, le texte précise que le professeur est laissé juge de l'opportunité d'admettre un résultat, d'en ébaucher une démonstration, ou de le démontrer.
Les travaux dirigés sont le moment privilégié de la mise en œuvre, et de la prise en main par les élèves des techniques classiques et bien délimitées inscrites dans le corps du programme. Cette maîtrise s'acquiert notamment grâce à des exercices que les étudiants doivent in fine être capables de résoudre par eux-mêmes.
La présentation de l'algèbre linéaire a été profondément remaniée, mais l'ensemble des contenus relatifs à ce domaine n'est en rien modifié si l'on considère l'ensemble des deux années de préparation. En première année, il est procédé à un allègement substantiel en abordant le sujet par le biais du calcul : systèmes d'équations linéaires, calcul matriciel. Seule la présentation de l'espace vectoriel $\mathbf{K}^n$ muni de sa base canonique est demandée. En particulier, l'étude générale des problèmes liés aux changements de base est renvoyée en seconde année. L'espace vectoriel, comme objet général, n'est présenté qu'en seconde année. Ce choix a pour ambition de donner aux étudiants une connaissance et une habitude " pratique " du calcul multidimensionnel qui conférera à l'introduction de la notion abstraite d'espace vectoriel un arrière-plan concret.
La part relative à l'analyse est la moins touchée par la réécriture ; dans ce programme comme dans l'ancien, on s'attache principalement à développer l'aspect opératoire, et donc à ne pas insister sur les questions les plus fines ou spécialisées, ni sur les exemples "pathologiques". L'évolution des programmes de lycée devrait permettre aux étudiants d'aborder cette partie dans des conditions au moins aussi favorables que précédemment.
La partie importante relative aux probabilités a également été remaniée, pour tenir compte de l'évolution des programmes du lycée. On confortera les notions déjà abordées en terminale scientifique, en les traitant de manière plus structurée. En première année, l'accent est mis sur le langage de la théorie des ensembles, les techniques élémentaires de dénombrement, et sur les espaces probabilisés finis. Tout ce qui concerne les variables aléatoires dont l'ensemble des valeurs est infini dénombrable ou de la puissance du continu est traité en seconde année.
Le volume général sur l'ensemble des deux années est constant à l'exception d'une réduction notable : séries entières et fonctions génératrices ne sont plus traitées.
Les interactions entre les différentes parties du programme restent fortes et mériteront d'être soulignées, de même que les liens avec d'autres disciplines, permettant ainsi de mettre en évidence la spécificité et la valeur de la démarche mathématique. Quelques repères historiques pourront éventuellement être fournis aux étudiants. Mis à part les contraintes découlant de manière directe de l'organisation en deux années, (en particulier s'agissant de l'algèbre linéaire et des probabilités), le programme n'impose à l'intérieur de l'une ou l'autre des années aucune progression précise ; le professeur garde toute liberté pour organiser son enseignement.

Algorithmique

L'évolution des matériels et logiciels conduit à renforcer la partie réservée à l'algorithmique. En effet, c'est une des conséquences les plus visibles du développement des moyens de calcul sous toutes ses formes, que de permettre aux mathématiques de disposer d'un tel lien vivant à l'expérimentation. On présentera de préférence, lorsque cela est possible, des méthodes constructives accompagnées de la description d'un algorithme plutôt que des démonstrations d'existence ou de convergence démunies de procédé de construction.
La présentation des algorithmes s'entend sur deux niveaux. D'une part, ils peuvent être présentés sous une forme logique abrégée, sans référence obligatoire à un langage informatique particulier ; d'autre part, ils sont destinés à être mis en œuvre sur machine, soit sur

calculatrice, soit à l'occasion des heures passées en salle informatique. Le professeur adaptera sa présentation aux conditions matérielles, en s'efforçant de réaliser de véritables travaux pratiques de mathématiques.

PREMIÈRE ANNÉE

I - NOMBRES COMPLEXES ET POLYNÔMES

A - Nombres complexes

Les nombres complexes sont étudiés en tant qu'outil. L'objectif est de consolider les acquis de la classe terminale.

a) Nombres complexes ; nombres complexes conjugués. Représentation géométrique d'un nombre complexe ; affixe d'un point, d'un vecteur.	La construction de **C** est hors programme. L'utilisation des nombres complexes pour résoudre des problèmes de géométrie n'est pas un objectif de ce programme.
b) Module d'un nombre complexe : module d'un produit, inégalité triangulaire. Nombres complexes de module 1 ; argument d'un nombre complexe non nul, notation $e^{i\theta}$ Relation $e^{i(\theta+\theta')}=e^{i\theta}.e^{i\theta'}$, lien avec les formules de trigonométrie ; formule de Moivre ; formules d'Euler : $\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})$, $\sin\theta=\frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})$, Définition de e^z pour z complexe, formule $e^{z+z'}=e^z.e^{z'}$ Dérivation de $x \to e^{mx}$ où m est complexe et x réel.	L'étude des racines n-ièmes d'un nombre complexe est hors programme. La résolution générale d'une équation du type $z^n=a$ ne peut être demandée sans indication sur la méthode. Ce paragraphe pourra être traité lors de l'étude du calcul intégral et des équations différentielles. Il devra être fait assez tôt dans l'année pour être utilisé en physique et chimie.
c) Applications. Résolution des équations du second degré à cœfficients réels. Somme et produit des racines. Transformation de a cos θ + b sin θ, où a et b sont réels, en $r\cos(\theta+\varphi)$. Mise en œuvre, sur des exemples, des formules de Moivre et d'Euler (linéarisation de polynômes trigonométriques, conversion de sommes en produits).	Les équations à cœfficients complexes ne sont pas au programme. Sous forme d'exercices on révisera équations et inéquations trigonométriques élémentaires.

B - Polynômes à coefficients réels ou complexes

Les fonctions polynômes sont plus simplement appelées polynômes ; la notion de polynôme en tant qu'objet formel est hors programme.
La division euclidienne et la division suivant les puissances croissantes ne sont pas au programme. Aucune connaissance sur les fractions rationnelles n'est au programme.

Deux polynômes ayant en tout point de **R** ou **C** même valeur numérique ont mêmes cœfficients. Degré. Cœfficients et degré d'une combinaison linéaire de polynômes. Cœfficients et degré du produit de deux polynômes. Le composé de deux polynômes est un polynôme. Formule du binôme (voir aussi au VIII). Dérivation. Formule de Taylor. Racines (ou zéros) d'un polynôme ; divisibilité par x-a. Généralisation à plusieurs racines distinctes. Ordre de multiplicité d'une racine. Décomposition d'un polynôme à cœfficients complexes en un produit de facteurs du premier degré. Cas d'un polynôme à cœfficients réels : racines complexes conjuguées, factorisation sur **R**.	Ce résultat pourra être admis. L'équivalence entre la factorisation par $(x-a)^k$ et les relations $f^{(j)}(a)=0$ pour j=0,1,...,k - 1 sera démontrée. Le théorème 'un polynôme de degré inférieur ou égal à n ayant au moins (n+1) racines deux à deux distinctes est nul' sera démontré. Décomposition sur **C** admise.

II - ALGÈBRE LINÉAIRE

Les scalaires ne pourront être que les nombres réels ou les nombres complexes. La notion générale d'espace vectoriel n'est pas au programme de première année. Le but du professeur de première année sera de faire maîtriser les concepts fondamentaux sans excès de technicité ni d'abstraction en centrant son travail sur le calcul matriciel. Le professeur choisira les démonstrations qu'il présente et celles qu'il admet.
Ce qui suit fournit un ordre de présentation possible, il n'est pas obligatoire. K désignera l'ensemble des nombres réels ou complexes.

A - Systèmes d'équations linéaires

Définition. Discussion et résolution d'un système linéaire d'équations par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes. Systèmes équivalents. Cas particuliers des systèmes triangulaires. Système homogène. Un système linéaire a zéro, une ou une infinité de solutions. Dans ce dernier cas, on exprime toutes les inconnues en fonction de certaines d'entre elles. La solution générale d'un système est de la forme (solution particulière)+(solution générale du système homogène). Système de Cramer (système de n équations et n inconnues qui a une solution unique).	Par opérations élémentaires on entend : multiplier une équation par un scalaire non nul, ajouter à une équation une combinaison linéaire des autres. On fera le lien entre l'intersection de droites et de plans dans le plan et dans l'espace et la résolution de systèmes linéaires. On illustrera ces notions à l'aide d'exemples dont la résolution est simple. Les déterminants sont hors programme.

B - Matrices à coefficients dans K

Matrices. Matrices lignes, colonnes, carrées, triangulaires, diagonales. Matrice nulle, matrice unité (identité). Opérations sur les matrices : somme, produit par un scalaire, produit. Propriétés de ces opérations (en particulier formule du binôme pour des matrices qui commutent). Écriture matricielle d'un système linéaire. Matrice inversible, matrice inverse. Inverse d'un produit. Recherche pratique de l'inverse d'une matrice, par la résolution d'un système de Cramer. Transposée d'une matrice. Transposée d'une somme, d'un produit de matrices, de l'inverse d'une matrice. Matrice symétrique.	Produit de matrices diagonales. Les justifications théoriques (relatives à l'algèbre linéaire) seront données ultérieurement au titre D.

C - Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

En première année, on ne donnera pas la définition générale d'espace vectoriel. On travaillera dans Kn.

Définition de l'espace vectoriel K^n, règles de calcul. Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs. Sous-espaces vectoriels. Intersection de deux sous-espaces vectoriels. Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs. Famille génératrice finie d'un sous-espace vectoriel. Famille libre finie. Famille liée finie. Base d'un sous-espace vectoriel. Dimension. Base canonique de K^n. Matrice colonne des coordonnées d'un vecteur dans une base. Dans un sous-espace vectoriel de dimension p : Toute famille libre a au plus p éléments. Une famille libre ayant p éléments est une base. Toute famille génératrice a au moins p éléments. Une famille génératrice ayant p éléments est une base. Rang d'une famille finie de vecteurs.	On fera le lien avec les règles de calcul des vecteurs du plan et de l'espace de la géométrie. On entend par sous-espace vectoriel un ensemble de vecteurs stable par combinaison linéaire et contenant le vecteur nul. On utilisera la notation vect(x1, x2,...xk). On admettra que toutes les bases d'un sous-espace vectoriel ont même cardinal appelé dimension du sous-espace vectoriel. Tout ou partie des démonstrations correspondantes pourra être admis.

D - Applications linéaires

Définition d'une application linéaire de K^p dans K^n. Noyau, image. Lien avec : f injective, f surjective, f bijective. Opérations sur les applications linéaires : addition, multiplication par un scalaire, composition, réciproque. Propriétés de ces opérations. Détermination d'une application linéaire par l'image des vecteurs de la base canonique, matrice de l'application linéaire dans les bases canoniques. Matrice de la somme de deux applications linéaires, du produit par un scalaire d'une application linéaire, de la composée de deux applications linéaires, de l'application réciproque. Rang d'une application linéaire, rang d'une matrice, rang de la transposée (résultat admis), rang d'un système.	

III - GÉOMÉTRIE

Cette rubrique, consolidant les acquis des élèves, sert de support intuitif et de terrain d'application à l'algèbre linéaire. Elle est étudiée aussi pour son utilité en sciences physiques.
On se place dans le plan et l'espace géométriques usuels ; la notion générale d'espace affine est hors programme.

Une origine étant choisie, un vecteur est représenté par un point du plan ou de l'espace. Norme euclidienne d'un vecteur, produit scalaire de deux vecteurs du plan et de l'espace. Propriétés. Angle de deux vecteurs du plan ou de l'espace (défini par son cosinus). Bases et repères orthonormaux. Expression analytique et matricielle de la norme et du produit scalaire dans une base orthonormale.	Par représentation sous forme de couples ou de triplets de coordonnées, les vecteurs apparaissent comme éléments de $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$ On rappellera les définitions et les propriétés de la norme et du produit scalaire apprises en classes de première et de terminale. À cette occasion, on rappellera la définition de la projection orthogonale d'un vecteur sur une droite ou sur un plan. On remarquera qu'une famille formée de deux ou trois vecteurs orthogonaux non nuls est libre.
Droite : vecteurs directeurs, équations paramétriques d'une droite. Angle de deux droites (compris entre 0 et $\pi/2$). Dans le plan : cœfficient directeur (pente) d'une droite, vecteur normal à une droite ; en repère orthonormal, équation cartésienne d'une droite obtenue à l'aide d'un vecteur normal, expression de la distance d'un point à une droite. Équation d'un cercle défini par son centre et son rayon. Dans l'espace : équations paramétriques d'un plan, vecteur normal à un plan ; en repère orthonormal, équation cartésienne d'un plan obtenue à l'aide d'un vecteur normal, expression de la distance d'un point à un plan. Angle de deux plans (angle de deux droites normales). Équation d'une sphère définie par son centre et son rayon.	*A* et *B* étant deux points distincts du plan (ou de l'espace), un point M du plan (ou de l'espace) appartient à la droite *(AB)* si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AM}$ appartient au sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $\overrightarrow{AB}$ *A, B* et *C* étant trois points non alignés de l'espace, un point M de l'espace appartient au plan passant par *A, B* et *C* si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AM}$ appartient au sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
Angle orienté de deux vecteurs du plan. Produit vectoriel de deux vecteurs. Propriétés usuelles. Expression analytique du produit vectoriel dans une base orthonormale directe.	On adoptera les conventions de la physique pour orienter le plan ou l'espace. Lien avec les calculs d'aires de parallélogrammes ou de triangles de l'espace.

IV - SUITES RÉELLES ET FONCTIONS RÉELLES D'UNE VARIABLE RÉELLE

Le but de cette rubrique est de mettre en place les méthodes courantes de travail sur les suites et les fonctions. L'analyse est un outil pour les probabilités et pour les sciences physiques et permet de développer la rigueur. On évitera tout exercice trop fin pour mettre l'accent sur les "bonnes fonctions", on évitera une trop grande technicité calculatoire.

A - Suites réelles

a) Récurrences. Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques. Somme des n premiers entiers, des n premiers termes d'une suite géométrique. Suites vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, a et b étant deux réels.	Pour les suites arithmético-géométriques, une méthode doit être connue, mais la formule générale n'est pas exigible.
b) Suites réelles. Somme, produit, quotient. Limite finie, limite infinie, convergence, divergence. Si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers l, alors (u_n) converge vers l Opérations sur les limites. Limites et inégalités : signe d'une suite de limite non nulle, théorème des "gendarmes" et extension aux limites infinies. Majorant, minorant, plus grand, plus petit élément d'une partie non vide de $\mathbf{R}$. Borne supérieure, inférieure. Suites majorées, minorées, bornées. Suites monotones. Existence d'une limite finie ou infinie pour une suite monotone. Suites adjacentes et théorème des suites adjacentes. Exemples d'étude de suites du type $u_{n+1}=f(u_n)$. Suites équivalentes, notation $u_n \sim v_n$ équivalent d'un produit et d'un quotient. Utilisation des équivalents pour la recherche de limites.	La définition d'une limite par (ε, n_0) doit être présentée aux étudiants, mais aucune technicité ne pourra être exigée d'eux en la matière. Un exercice comme celui de la moyenne de Césaro, par exemple, est totalement hors de l'esprit de la classe. La notion générale de suite extraite est hors programme. La notion de suite de Cauchy n'est pas au programme. On admettra l'existence de la borne supérieure d'une partie majorée non vide. Aucun théorème général relatif à ce type de suites n'est exigible des étudiants. Le développement sur les équivalents doit être modeste. On se limitera aux suites dont le terme général ne s'annule pas.

B - Limites, continuité

a) Limites Fonctions numériques d'une variable réelle ; somme, produit, quotient. Limite d'une fonction en un point ; limite à droite, limite à gauche. Limite en + ∞ ou - ∞. Si (u_n) tend vers a et si la limite de f en a est b, alors la suite $(f(u_n))$ tend vers b. Opérations sur les limites. Limite de fonctions composées. Limites et inégalités Fonctions équivalentes, fonction négligeable devant une fonction. Notations f~g, f = o(g). Croissances comparées des fonctions exponentielles, puissances et logarithmes. Une fonction monotone sur un intervalle ouvert admet une limite finie ou infinie aux bornes de l'intervalle.	La définition d'une limite par (ε, α) doit être présentée aux étudiants, mais aucune technicité ne pourra être exigée d'eux en la matière. On pourra faire une ou deux démonstrations, les autres pouvant être admises. On a les mêmes résultats que pour les suites. Même remarque que pour les suites : développement succinct et "bonnes" fonctions. À cette occasion, on définira de manière générale les fonctions x^{α} Les fonctions hyperboliques sont hors programme.
b) Continuité Continuité en un point. Opérations, composition. Continuité à droite et à gauche. Prolongement par continuité. Continuité sur un intervalle. Théorème des valeurs intermédiaires. Image d'un segment par une fonction continue sur ce segment. Une fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I est une bijection de I sur l'intervalle f(I). Propriétés de l'application réciproque. Définition, monotonie, et représentation graphique des fonctions Arctan, Arcsin, Arccos. Parité de Arctan et Arcsin.	La notion de continuité uniforme n'est pas au programme. La démonstration du théorème des valeurs intermédiaires n'est pas exigible des étudiants. Résultat admis. On pourra présenter aux élèves un algorithme de résolution approchée d'une équation f(x) = 0, mais aucune méthode n'est exigible des étudiants. On conviendra dans un tableau de variations, que les flèches obliques traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction. Dans la rédaction de la solution à un problème, une simple référence au tableau de variations suffira pour justifier l'existence et l'unicité d'une solution d'une équation du type f(x) = 0. Aucune formule n'est à connaître.

C - Dérivation, développements limité

a) Dérivée en un point ; dérivée à gauche, dérivée à droite, fonction dérivée. Notation f' et $\frac{df}{dx}$ Interprétation graphique, équation de la tangente à une courbe. Opérations sur les dérivées : linéarité, produit, quotient, fonction composée, fonction réciproque, application aux fonctions Arctan, Arcsin et Arccos. Extension de la notion de dérivée à une fonction à valeurs complexes, ou à valeurs dans $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$	Ces notions sont données ici pour servir à la résolution d'équations différentielles (voir le paragraphe correspondant), et aux applications physiques (vitesse, accélération). Elles ne feront pas l'objet de développements plus poussés.
b) Théorème de Rolle. Formule des accroissements finis. Caractérisation des fonctions croissantes (au sens large) par la positivité de leur dérivée. Cas des fonctions constantes. Si la dérivée est strictement positive sur un intervalle, alors la fonction est strictement croissante sur cet intervalle. Théorème sur la limite de la dérivée. Recherche d'extremum. La courbe représentative d'une fonction à dérivée croissante est au-dessus de chacune de ses tangentes.	L'inégalité des accroissements finis n'est pas exigible des étudiants, celle-ci pouvant être trouvée à partir de la formule. La règle de l'Hospital et la formule des accroissements finis généralisés ne sont pas au programme. Les propositions concernant la réciproque de cette propriété ne sont pas au programme. L'étude générale de la convexité est hors programme.
c) Dérivées d'ordre supérieur. Dérivée n-ième d'un produit. Fonction de classe C^n, de classe C^∞ Formule de Taylor-Lagrange pour une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle (avec reste en $f^{(n+1)}(c)$).	La formule de Taylor-Lagrange peut être admise. L'inégalité de Taylor-Lagrange n'est pas exigible des étudiants.

d) Développements limités. Opérations sur les développements limités : somme, produit, composé. Développement limité de f à partir de celui de f'. Existence d'un développement limité à l'ordre n pour une fonction de classe C^n : formule de Taylor-Young. Développements limités usuels au voisinage de 0 : e^x, $\ln(1+x)$, $\cos x$, $\sin x$, $(1+x)^\alpha$.	On rappelle que la division des polynômes suivant les puissances croissantes n'est pas au programme. La formule de Taylor-Young pourra être admise. Les exercices de calcul de développements limités auront pour objet de faciliter l'assimilation des propriétés fondamentales, et ne doivent pas être orientés vers la virtuosité calculatoire.
e) Construction d'une courbe plane définie par y = f(x). Étude des branches infinies, recherche de droites asymptotes et étude de la position de la courbe par rapport à son asymptote. Notion de courbe paramétrée $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$	Les exercices destinés à illustrer cette notion seront réalisés sur ordinateur. L'étude des branches infinies, des points doubles et des points stationnaires est hors programme.

V - CALCUL INTÉGRAL

A - Définition et propriétés

Définition de l'intégrale d'une fonction continue *f* sur un segment : l'existence d'une primitive F de *f* étant admise, $\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a)$. L'intégrale de f positive est l'aire sous la courbe. Extension de cette interprétation au cas d'une fonction de signe non constant. Propriétés élémentaires : relation de Chasles, positivité, linéarité ; encadrement de l'intégrale à partir d'un encadrement de f. Pour a<b, $\int_a^x \lvert f(t) \rvert\,dt \quad \lvert \int_a^b f(t)\,dt \rvert$. Primitives d'une fonction sur un intervalle. Si f est continue sur un intervalle I et a un point de I, alors la fonction F définie sur I par : $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a. Valeur moyenne d'une fonction : $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n})$. Intégrale d'une fonction continue par morceaux ; cas d'une fonction en escalier. Intégrale d'une fonction à valeurs complexes.	Pour une fonction continue et positive, et en admettant l'existence et les propriétés de la notion intuitive d'aire, on établira le lien entre aire et primitive. Ce résultat est intuitif en raison de l'interprétation géométrique de l'intégrale. Il pourra être démontré dans le cas d'une fonction monotone ou à dérivée bornée. On donnera seulement les définitions.

B - Procédés d'intégration

a) Intégration par parties ; intégration par changement de variables. b) Intégration des fonctions rationnelles des types suivants : $\frac{1}{(x-a)^n}$, $\frac{ax+b}{x^2+px+q}$ où n est un entier naturel, a,b,p,q étant réels. Pour une fonction du type $f(x) = c + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)\right)$, on établira : $a_k = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t)\cos(k\omega t)dt \quad c = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t)dt$ $b_k = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t)\sin(k\omega t)dt$.	Toute autre situation devra comporter des indications quant à la méthode. Exercice motivé par la liaison avec les sciences expérimentales.

C - Intégrale généralisée

Cette rubrique ne figure qu'au programme de deuxième année.

D - Équations différentielles à variable réelle

a) Résolution des équations différentielles du premier ordre $y'+a(x)y = b(x)$, où a et b sont continues réelles sur un intervalle. Méthode de la variation de la constante. b) Résolution de $y''+ a y'+ by = f(x)$ où a et b sont réels - dans le cas $f = 0$ - dans le cas où f est un polynôme - dans le cas où f est une exponentielle e^{mx} (m complexe).	Pour toute autre équation différentielle une méthode de résolution doit être donnée aux étudiants. La méthode de la variation des constantes pour les équations du second ordre est hors programme.

VI - SÉRIES

Cette rubrique ne figure qu'au programme de deuxième année.

VII - FONCTIONS RÉELLES DE PLUSIEURS VARIABLES RÉELLES

Les étudiants sont amenés à manipuler en sciences physiques des fonctions de plusieurs variables. Cette première approche, qui sera complétée en deuxième année, devra donc être abordée suffisamment tôt dans l'année. On se limitera au cas n   3.

Dérivées partielles premières d'une fonction définie sur $\mathbf{R}^n$. Surface représentative d'une fonction de deux variables. Sur des exemples, détermination d'une fonction dont les dérivées partielles premières sont connues. Utilisation des dérivées partielles premières pour évaluer une petite variation de la valeur d'une fonction découlant de petites variations sur les variables.	On soulignera le lien entre fonctions partielles et certaines sections de cette surface.

VIII - PROBABILITÉS

Le but de cette rubrique est de consolider et de développer la formation des étudiants au raisonnement probabiliste. Les diverses notions seront illustrées par des exemples issus de jeux, de la vie courante ou des sciences.

A - Notions d'algèbre élémentaire

a) Vocabulaire des ensembles et des applications. Élément, appartenance, inclusion, réunion, intersection, complémentaire, système complet. Injection, surjection, bijection, application réciproque. Composé de deux bijections. Image d'une partie, image réciproque. Produit cartésien de n ensembles.	Ces notions sont introduites comme outil et doivent faire l'objet d'un développement modeste sans abstraction inutile. Elles ne pourront constituer le thème principal d'aucune question d'écrit ou d'oral. On se limitera aux unions et intersections finies. Un système complet pour Ω est une famille de parties deux à deux disjointes dont la réunion est l'ensemble Ω. Un élément de Ω^n sera appelé n-liste ou n-uplet d'éléments de Ω.
b) Dénombrements : cardinal d'un ensemble fini, notation card(E). Deux ensembles finis E et F ont le même cardinal si et seulement si il existe une bijection entre E et F. Cardinal d'un produit cartésien, de E^n. Cardinal de l'ensemble des parties de E. Nombre d'arrangements, de permutations, de combinaisons (sans répétitions). Formule du binôme.	La notion de cardinal est la notion intuitive de nombre d'éléments. On se limitera au cardinal des ensembles finis. On donnera sans démonstration formelle des propriétés intuitivement évidentes comme le cardinal de la réunion de deux ensembles (finis) disjoints. On évitera tout excès de formalisme et de technicité dans les dénombrements.

Le B.O.
N°3
26 JUIN
2003
HORS-SÉRIE

B - Concepts de base des probabilités

En première année, on se limite au cas où l'univers Ω est fini et où les événements sont les parties de Ω.

a) Épreuve (expérience aléatoire). Ensemble des résultats possibles de l'épreuve (univers). Evénement, événement certain, impossible, événements incompatibles, système complet d'évènements. Probabilité, propriétés. Probabilité d'une réunion de n événements. Si $\Omega=\{x1, x2, ..., x_n\}$ et $p_1,p_2,...,p_n$ sont des réels positifs ou nuls de somme 1, il existe une et une seule probabilité P sur Ω telle que $P(\{x_i\})=p_i$ pour tout i. Cas de l'équiprobabilité ou probabilité uniforme.	On se limitera au cas où l'algèbre des évènements est l'ensemble des parties de Ω. La formule du crible (ou de Poincaré) est admise. Choisir les valeurs des pi revient à choisir un modèle probabiliste.
b) Probabilité conditionnelle : définition, formule. $P(A\cap B)=P(B/A)P(A)$. Formule des probabilités composées (conditionnement successif). Formule des probabilités totales $P(B)=\sum P(B/A_i)P(A_i)$. Formule de Bayes. Indépendance de deux événements, de deux épreuves. Événements (mutuellement) indépendants, épreuves (mutuellement) indépendantes.	On utilisera l'une ou l'autre des deux notations $P(B/A)$ et $P_A(B)$ pour la "probabilité de B sachant A" (probabilité de B sachant que A est réalisé). On utilisera des représentations telles que arbres, tableaux, diagrammes,etc... Un arbre ou un tableau correctement construit constitue une preuve. On signalera que l'indépendance n'est en général pas démontrable, mais constitue un choix (ou une conséquence) de la modélisation. La notion générale de probabilité produit n'est pas exigible.

C - Variables aléatoires réelles

En première année on se limite aux variables aléatoires ne prenant qu'un nombre fini de valeurs.

a) Variable aléatoire réelle sur Ω : toute application de Ω dans **R**. Loi [de probabilité] deX : c'est l'application de X(Ω) dans **R** associant à tout x de X(Ω) $P(X=x)$. Fonction de répartition deX : c'est l'application F_X de **R** dans **R** associant à tout t réel $F_X(t)=P(X\leq t)$ Espérance mathématique, formule donnant l'espérance de u(X) à partir de la loi deX. Moments. Variance, écart-type. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	On rappellera les représentations graphiques de ces deux fonctions, respectivement en bâtons et en escaliers. Les étudiants devront savoir déterminer la loi d'une variable aléatoire à partir de sa fonction de répartition. Les propriétés générales des fonctions de répartition (continuité à droite, limites ...) ne sont pas au programme. Résultat admis.
b) Lois usuelles : loi uniforme, de Bernoulli, binomiale, hypergéométrique. Approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binomiale. Espérance et variance des variables certaines, de Bernoulli, binomiales. Espérance d'une variable uniforme sur {1,2,...,n} et d'une variable hypergéométrique.	Les étudiants devront savoir reconnaître les situations classiques de modélisation par des lois uniformes, de Bernoulli, hypergéométrique et binomiale. La notion de convergence en loi n'est pas au programme.
c) Couple Z=(X,Y) de deux variables aléatoires réelles. Loi conjointe, lois marginales, lois conditionnelles. Loi de la somme de deux variables aléatoires à valeurs entières positives. Espérance de u(X,Y). Linéarité de l'espérance. Covariance. Cœfficient de corrélation linéaire. Variance de aX+bY. Variables indépendantes. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors f(X) et g(Y) sont indépendantes.	Le cœfficient de corrélation est indépendant des unités choisies. Cas où ce cœfficient est égal à - 1 ou 1. Résultat admis.
d) Généralisation au cas de n variables aléatoires. Espérance de la somme. Indépendance [mutuelle]. Loi de la somme de n variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre. Si (X1, X2,..., Xn) sont indépendantes, toute sous-famille l'est aussi. Si X1, X2,..., Xn,...,Xp sont des variables aléatoires indépendantes, alors $f(X1, X2,..., X_n)$ et $g(X_n+1,..., X_p)$ sont indépendantes, il en est de même pour $f_1(X_1),.....f_p(X_p)$. Variance d'une somme de n variables aléatoires.	Résultats admis.

SECONDE ANNÉE

I - NOMBRES COMPLEXES ET POLYNÔMES

Exercices sur le programme de première année

II - ALGÈBRE LINÉAIRE

Les scalaires ne pourront être que les nombres réels ou les nombres complexes.
K désignera l'ensemble des nombres réels ou complexes.

A - Systèmes d'équations linéaires

Exercices sur le programme de première année.

B - Matrices

Exercices sur le programme de première année.

C - Espaces vectoriels

Le professeur choisit les démonstrations qu'il présente et les résultats qu'il admet.

Structure d'espace vectoriel. Règles de calcul. Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs. Sous-espaces vectoriels. Les espaces vectoriels suivants doivent être connus : K^n, l'ensemble des applications définies sur un intervalle I à valeurs dans K, K[X], $K_n[X]$, l'ensemble des suites à éléments dans K, $M_{n,p}(K)$, les variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité (admis).	L'étude de $M_{n,p}(K)$ (dimension, base...) est hors programme.
Intersection de deux sous-espaces vectoriels. Sous-espace engendré par une famille finie. Somme de deux sous-espaces. Somme directe de deux sous-espaces, sous-espaces supplémentaires. Famille génératrice finie. Famille libre finie. Famille liée finie. Bases et dimension des espaces vectoriels admettant une famille génératrice finie (résultats admis). Coordonnées d'un vecteur dans une base. Bases canoniques de K^n et $K_n[X]$. Dans un espace vectoriel de dimension finie n : Toute famille libre a au plus n éléments. Une famille libre ayant n éléments est une base. Toute famille génératrice a au moins n éléments. Une famille génératrice ayant n éléments est une base. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors la dimension de F est inférieure ou égale à la dimension de E. Si les deux dimensions sont égales, alors F = E. Caractérisation d'une somme directe de deux sous-espaces vectoriels par la dimension ou la juxtaposition des bases. Rang d'une famille finie de vecteurs.	On utilisera la notation vect(x_1, x_2,...x_k).

D - Applications linéaires

1) Définition d'une application linéaire, endomorphisme. Noyau, image. Lien avec : f injective, f surjective, f bijective, isomorphisme.	On observera que *L(E,F)* est un espace vectoriel, mais son étude (dimension, base,...) est hors programme.
Opérations sur les applications linéaires : addition, multiplication par un scalaire, composition, réciproque. Propriétés de ces opérations. Définition d'une projection sur un sous-espace vectoriel parallèlement à un autre.	La caractérisation par $p\circ p = p$ n'est pas au programme. Tout espace de dimension n est isomorphe à K^n Relation admise.
2) Cas de la dimension finie. Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base. f est un isomorphisme si et seulement si l'image d'une base est une base. Si E et F ont même dimension et si $f \in L(E,F)$ il y a équivalence entre f injective, f surjective, f bijective. Relation : dim Ker f + dim Im f = dim E. Rang d'une application linéaire.	

3) Lien avec les matrices.	
Matrice d'une application linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie dans un espace vectoriel de dimension finie, une base ayant été choisie dans chacun d'eux. Rang d'une matrice.	
Rang d'un système linéaire.	
Rang de la transposée (résultat admis).	
Changement de base. Matrice de passage.	
Action d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur et sur la matrice d'un endomorphisme.	Les matrices équivalentes ne sont pas au programme.
Matrices semblables.	

E - Valeurs propres, vecteurs propres

Valeurs propres, vecteurs propres, d'un endomorphisme (ou d'une matrice carrée), sous-espaces propres.	Les polynômes caractéristiques sont hors programme.
Toute matrice carrée à cœfficients complexes possède au moins une valeur propre.	Résultat admis.
Une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.	
Une famille obtenue par juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.	
Endomorphisme (ou matrice carrée) diagonalisable.	
En dimension n, un endomorphisme ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.	Application au calcul de la puissance nième de matrices diagonalisables.
Un endomorphisme (une matrice carrée) est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres est la dimension de l'espace.	
Toute matrice carrée symétrique réelle est diagonalisable.	Résultat admis.

III - GÉOMÉTRIE

Exercices sur le programme de première année.

IV - FONCTIONS RÉELLES D'UNE VARIABLE RÉELLE

Exercices sur le programme de première année.

V - CALCUL INTÉGRAL

A - Définition et propriétés

Exercices sur le programme de première année.

B - Procédés d'intégration

Exercices sur le programme de première année.

C - Intégrale généralisée

Cette rubrique est introduite en vue du calcul des probabilités. Au cours d'une épreuve de mathématiques, les intégrales généralisées ne pourront intervenir que dans un cadre probabiliste.

Définition de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert, convergence, divergence.	
Théorème de comparaison pour deux fonctions positives f et g telles que f g. Convergence absolue d'une intégrale généralisée.	Tout autre critère de convergence est hors programme. Les intégrales semi-convergentes sont exclues du programme.

D - Équations différentielles à variable réelle

Exercices sur le programme de première année.

VI - SÉRIES

Cette rubrique est introduite en vue du calcul des probabilités. Au cours d'une épreuve de mathématiques, les séries ne pourront intervenir que dans un cadre probabiliste.

Convergence, divergence d'une série ; reste d'une série convergente.	
Convergence et calcul de la somme pour les séries géométriques, séries de terme général nq^n, n^2q^n, séries exponentielles.	La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est hors programme.
Théorème de comparaison pour deux séries à termes positifs telles que $u_n \leq v_n$, à partir d'un certain rang.	Tout autre critère de convergence est hors programme.
Convergence absolue d'une série à termes réels.	Les séries semi-convergentes sont exclues du programme. Les séries entières sont hors programme.

VII - FONCTIONS RÉELLES DE PLUSIEURS VARIABLES RÉELLES

On complète ici l'étude amorcée en première année. Le professeur est laissé juge des explications à donner, mais aucune démonstration n'est demandée. On se limitera au cas n 3.

A - Calcul différentiel

Limite, continuité d'une fonction de n variables.	Aucune question ne pourra être posée sur ce point.
Applications partielles, dérivées partielles d'ordre un et deux, interversion des dérivations. Pour une fonction définie sur $\mathbf{R}^n$ et admettant des dérivées partielles : les dérivées partielles en un extremum s'annulent.	L'étude d'une réciproque est hors programme.
Pour une fonction f de classe C^1 $f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o,y_o) - (h \frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o))$ est négligeable devant $\sqrt{h^2 + k^2}$ Notation différentielle. Définition du gradient (dimension 2 ou 3) ; calcul dans un repère orthonormal en coordonnées cartésiennes.	
Calcul des dérivées partielles d'une fonction composée de fonctions de classe C^1.	Les étudiants doivent savoir dériver f(x(t),y(t)) et f(x(u,v),y(u,v)).
Condition nécessaire pour que Pdx+Qdy+Rdz soit la différentielle d'une fonction (P, Q, R étant de classe C^1) ; la condition est suffisante sur un pavé.	

B - Calcul intégral

Calcul des intégrales doubles en coordonnées cartésiennes et en coordonnées polaires. Exemples de calculs d'aires planes et de volumes.	Aucune difficulté théorique ne sera soulevée. Ces intégrales ne pourront intervenir que dans un cadre probabiliste ou pour calculer des volumes. Les formules de changement de variables sont hors programme. Exemples motivés par la liaison avec les sciences physiques. Ils peuvent faire intervenir des intégrales simples ou doubles.

VIII - PROBABILITÉS

On aborde en deuxième année l'étude de variables aléatoires prenant une infinité de valeurs, discrètes ou admettant une densité (à l'exclusion de tout autre type). L'intérêt de ce nouveau type de modèle pour l'étude des phénomènes aléatoires sera souligné, on ne soulèvera aucune difficulté théorique sur les notions introduites dans cette rubrique.

A - Probabilité

Extension de la définition donnée en première année au cas où l'ensemble Ω est infini. Axiome de σ-additivité. Révision et extension à ce nouveau cadre des propriétés des probabilités et des probabilités conditionnelles vues en première année (VIII)B).	La notion de tribu et les résultats sur la probabilité d'une réunion (resp. intersection) croissante (resp.décroissante) sont hors programme. Résultats admis.

B - Variables aléatoires discrètes

Définition. Révision et extension à ce nouveau cadre des notions et propriétés vues en première année (VIII)C). Loi de Poisson. Espérance, variance. Loi de la somme de deux variables indépendantes suivant des lois de Poisson. Approximation dans certains cas d'une loi binomiale par une loi de Poisson. Loi géométrique : loi du nombre d'échecs précédant le premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre, ou loi du nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le premier succès.	On se limitera au cas où l'ensemble des valeurs est fini ou inclus dans l'ensemble des entiers relatifs. Résultats admis.

Le B.O.
N°3
26 JUIN
2003
HORS-SÉRIE

C - Densités de probabilité

On ne soulèvera aucune difficulté liée à l'apparition d'ensembles de mesure nulle, notion évidemment hors programme.

a) Variables aléatoires admettant une densité. Définition : fonctions de répartition et de densité. Lois usuelles : uniformes, normales (gaussiennes), exponentielles. Sur des exemples simples, recherche de la loi de Y = f(X), X ayant une densité connue.	On se limitera au cas où la fonction de répartition est continue partout et continûment dérivable sauf éventuellement en un nombre fini de points. L'égalité $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2/2) = \sqrt{2\pi}$ doit être connue des étudiants, mais sans justifications exigibles. On réalisera des applications numériques relatives à la loi normale. Pour la recherche de la loi de Y = f(X), on évitera des exemples inutilement compliqués comme la loi de sin(X), X uniforme sur $[-\pi/2, \pi]$.
b) Couple de variables aléatoires admettant une densité. Définition. Densités marginales et conditionnelles. Indépendance de n variables aléatoires. Généralisation des résultats vus en première année à ce sujet. Pour un couple admettant une densité, lien avec les densités marginales. Sur des exemples simples recherche de la loi de Z = f(X,Y), le couple (X,Y) ayant une densité connue. Cas particulier de la somme de deux variables indépendantes. Sommes de variables gaussiennes indépendantes.	Les étudiants doivent savoir utiliser le produit de convolution, dont la formule devra leur être rappelée en cas de besoin.
c) Espérances, variances, covariances et cœfficients de corrélation linéaire de variables à densité. Généralisation des définitions et des propriétés vues en première année.	

D - Théorèmes limite

Loi faible des grands nombres. Théorème de la limite centrée. Application à la loi binomiale, à la loi de Poisson.	On définira à cette occasion la notion de variable centrée et celle de variable réduite. On donnera deux énoncés pour le théorème de la limite centrée : si l'on a une suite de variables indépendantes $(X_n)_{n\ 1}$ de même loi, admettant une espérance μ et une variance $\sigma 2$, alors $\forall a < b \quad P\left(a < \dfrac{\dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} < b \right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b \dfrac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}}\, dx$ et on a un résultat analogue en remplaçant σ par $\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2}{n} \right)^{1/2}$, où $\overline{X}_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$.