Un sujet pour l'épreuve orale

Tirages dans une urne

Présentation

Le texte proposé ci-après est conçu pour l'épreuve orale des filières BCPST et TB.

On rappelle que l'emploi d'un logiciel (fourni) est autorisé dans cette épreuve.

Il s'agit de mettre en place une simulation d'une expérience probabiliste. La question 2 nécessite de bien comprendre la modélisation proposée pour engager une programmation simple et efficace. La principale difficulté est de bien gérer la règle du tirage sans remise, ainsi que d'assurer l'équiprobabilité des issues; une solution à bases de listes est évidemment possible, une autre, plus élégante, pouvant être obtenue en distinguant le numéro d'ordre des boules de leur étiquette.
La question 3 teste la compréhension des structures de liste, tandis que la question 4 teste le principe de balayage d'une liste.
Pour les candidats peu à l'aise avec l'informatique, la question 5 permet de se rétablir. Enfin, la question 6 est surtout là pour inscrire ce sujet dans une perspective scientifique où il convient de toujours confronter la théorie et l'expérience, sachant que cette dernière (sous forme simulée) peut aussi recéler des défauts de mise en œuvre. Compte tenu du temps imparti, il est peu vraisemblable que les candidats aient le temps d'aborder cette question.

Les compétences mobilisées dans ce sujet sont essentiellement les suivantes :

- ▷ Engager une recherche, définir une stratégie : question 2.
- ▷ Modéliser un phénomène à l'aide du langage mathématique : questions 1, 2.
- ▷ Mobiliser des connaissances scientifiques pertinentes : question 5.
- ▷ Traduire un algorithme dans un langage de programmation : questions 2, 3, 4.
- ▷ Argumenter, convaincre : compétence présente, par nature, dans l'ensemble de l'épreuve.
- ▷ Communiquer à l'écrit et à l'oral : compétence présente, par nature, dans l'ensemble de l'épreuve.

Énoncé

Soit n un entier naturel non nul. Une urne contient $2n$ boules indiscernables au toucher : n sont numérotées 0, les autres sont numérotées de 1 à n. On effectue au hasard deux tirages successifs et sans remise d'une boule dans cette urne. On note X le plus grand numéro obtenu, et Y le plus petit numéro obtenu lors de ces deux tirages.

1. Déterminer les valeurs prises par X.
2. Proposer une représentation informatique de l'urne et une fonction (écrite en langage Python) permettant de simuler une expérience telle que celle décrite ci-dessus et retournant la liste $[X, Y]$. On testera la fonction pour différentes valeurs de n.

   Indication : la fonction Python `randint(start,stop)` de la bibliothèque `random` fournit un nombre entier aléatoire compris entre `start` et `stop` (ces valeurs étant incluses).
3. Proposer une fonction permettant de simuler m expériences (avec m grand) telles que celle décrite ci-dessus et retournant la liste des résultats de ces m expériences.

   On testera la fonction pour différentes valeurs des paramètres n et m.
4. Écrire une fonction simulant les m expériences successives pour évaluer la probabilité de l'évènement $(X = Y + 1)$ sous la forme d'une fréquence. On testera cette fonction pour différentes valeurs de m.
5. Que vaut la probabilité (théorique) de l'évènement $(X = Y + 1)$?
6. Si le temps le permet : proposer une illustration graphique confirmant l'accord entre la théorie (question 5) et la simulation (question 4).