Un sujet pour l'épreuve orale
Suite de racines

Présentation

Le texte proposé ci-après est conçu pour l'épreuve orale en filières BCPST et TB.

L'exercice est construit de façon à ce que la difficulté soit progressive.

Il commence par une question élémentaire de mathématiques, permettant de poser le problème, ici la définition d'une suite implicite. La construction du tableau de variations de la fonction f_n, l'application du théorème de la bijection et l'encadrement de la solution α_n sont les capacités mathématiques testées dans cette question (elles relèvent de la compétence « mobiliser des connaissances scientifiques pertinentes »).

Tous les candidats peuvent ainsi aborder assez rapidement la question de modélisation, cœur de l'exercice. On attend ici que le candidat sache faire preuve d'autonomie quant à la méthode employée, ainsi qu'au choix du logiciel adapté à la méthode choisie. L'algorithme de dichotomie étant hors-programme, il est rappelé en complément sous l'exercice ; un candidat pourra par exemple utiliser Python pour mettre en œuvre cet algorithme afin de calculer les termes successifs de la suite (α_n). D'autres idées pourraient être de tracer les courbes des fonctions f_n à l'aide de Geogebra pour observer le comportement de la racine positive selon la valeur de n, ou d'utiliser Excel pour créer des tableaux de valeurs prises par les fonctions f_n pour différentes valeurs de n, tableaux qui, s'ils sont construits de façon judicieuse, feront apparaître des valeurs approchées pour les α_n.

Enfin en 3. on étudie mathématiquement la suite (α_n). Les questions suivent la démarche classique d'étude d'une suite implicite. La question 3b est plus difficile (mais toujours classique) et exploite le fait que

$$\lim_{n\to+\infty}(\alpha_n)^n = +\infty \text{ si } \lim_{n\to+\infty}\alpha_n \in]1,2].$$

Pour un excellent candidat arrivant vers le bout de l'exercice, on peut envisager de lui faire programmer la méthode de dichotomie s'il avait choisi une autre méthode en 2., ou lui demander d'expliquer l'algorithme de dichotomie (pourquoi définit-on ainsi les suites (a_n) et (b_n) ? comment connait-on sans calcul la longueur du segment $[a_n, b_n]$? etc.).

Les compétences mobilisées dans ce sujet sont essentiellement les suivantes :

- ▷ Représenter, changer de registre : question 2.
- ▷ Mobiliser des connaissances scientifiques pertinentes : questions 1,3.
- ▷ Identifier un problème sous différents aspects : question 4.
- ▷ Argumenter, convaincre : compétence présente, par nature, dans l'ensemble de l'épreuve.
- ▷ Communiquer à l'écrit et à l'oral : compétence présente, par nature, dans l'ensemble de l'épreuve.

On rappelle que l'emploi d'une calculatrice ou d'un logiciel (fourni) est autorisé dans cette épreuve.

Énoncé

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ \ f_n(x) = x^{n+1} - x^n.$$

1 Mise en place du problème

Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution α_n sur $[0,+\infty[$ et que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ 1 \leqslant \alpha_n \leqslant 2$$

2 Modélisation

À l'aide de méthodes numériques ou graphiques, proposer des conjectures relatives à la monotonie et la limite de la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$.
Selon la méthode choisie, on pourra utiliser l'un des logiciels suivants : Python, Geogebra ou Excel. On pourra exploiter, ou non, l'algorithme de dichotomie rappelé ci-dessous.

Algorithme de dichotomie

On considère une fonction f continue sur un segment $[a, b]$.
On suppose que f s'annule exactement une fois sur $[a, b]$, en un point que l'on note α.

On définit les suites $(a_k)_{k\geqslant 0}$ et $(b_k)_{k\geqslant 0}$ de la façon suivante :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Pour tout entier naturel k, on note $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$ et :

$$\begin{array}{llllll} \text{si} \quad f(a_k)f(c_k) \leqslant 0, & \text{alors} & a_{k+1} = a_k & \text{et} & b_{k+1} = c_k \\ & \text{sinon} & a_{k+1} = c_k & \text{et} & b_{k+1} = b_k \end{array}$$

On sait alors que les suites (a_k) et (b_k) convergent toutes les deux vers α, en vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \ a_k \leqslant \alpha \leqslant b_k \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N},\ \ b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$$

On peut alors montrer que si l'entier k est tel que $\dfrac{b-a}{2^k} \leqslant \varepsilon$, alors a_k et b_k sont des valeurs approchées à ε-près de α.

3 Étude mathématique

a) Déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$, pour tout entier naturel n et tout réel positif x.
En déduire la monotonie de la suite (α_n).

b) Prouver que la suite (α_n) est convergente, vers une limite notée ℓ.
En raisonnant par l'absurde, valider la conjecture faite en 2. pour la limite ℓ de la suite (α_n).

4 Complément

Si le temps le permet :
Que peut-on dire de la vitesse de convergence de la suite $(\alpha_n - \ell)$?