Un sujet pour l'épreuve orale

Ajustement d'un modèle de croissance logistique

Présentation

Le texte proposé ci-après est conçu pour l'épreuve orale en filières BCPST et TB.

La thématique de ce sujet est fournie par un article publié en 1919, où apparaît l'équation différentielle logistique, présente dans le programme TB et évoquée comme cas particulier d'équation différentielle non linéaire (autonome) dans le programme BCPST.

L'enjeu de ce sujet n'est pas seulement de bâtir un modèle explicatif d'une croissance végétale, mais aussi de faire travailler les candidats dans un contexte typique des démarches scientifiques : la lecture critique de documents et d'articles publiés.

Les deux premières questions, proches du cours, permettent au candidat de s'approprier le sujet.

Le travail de modélisation commence à la troisième question avec une observation des valeurs relevées sur le terrain et un typique aller-retour entre modèle et réalité. La quatrième question teste à nouveau la compréhension du modèle choisi en apportant une modification dans l'espace des paramètres.

La fin du sujet aborde modestement le problème de l'estimation des paramètres du modèle à partir des observations ; comme une approche par moindres carrés aurait été trop longue, seules des approches plus rudimentaires sont esquissées.

Les compétences mobilisées dans ce sujet sont essentiellement les suivantes :

- ▷ Concevoir un modèle à partir d'indications fournies : questions 3, 6a, 6b.
- ▷ Représenter, changer de registre : question 6c.
- ▷ Mobiliser des connaissances scientifiques pertinentes : questions 1b.
- ▷ Identifier un problème sous différents aspects : questions 1a, 2, 4.
- ▷ Critiquer ou valider un modèle ou un résultat : question 5.
- ▷ Argumenter, convaincre : compétence présente, par nature, dans l'ensemble de l'épreuve.
- ▷ Communiquer à l'écrit et à l'oral : compétence présente, par nature, dans l'ensemble de l'épreuve.

On rappelle que l'emploi d'une calculatrice ou d'un logiciel (fourni) est autorisé dans cette épreuve.

Énoncé

Une modélisation célèbre

Reed et Holland, dans leur article publié en 1919 [1], étudiaient la croissance de plants de tournesol et proposaient une modélisation logistique pour cette croissance. Le but de cet exercice est de revisiter la partie mathématique de l'article cité.

Les auteurs proposent de modéliser la croissance du tournesol au moyen de l'équation différentielle suivante :

$$f'(t) = r f(t)\left[1 - \frac{f(t)}{K}\right], \tag{1}$$

où $f(t)$ est la taille de la plante au temps $t \geqslant 0$ avec $f(0) = f_0 > 0$, $r > 0$ est le taux de croissance du modèle et $K > 0$ sa capacité limite. Ce modèle, qui est aujourd'hui l'un des plus utilisés en écologie, est connu sous le

1. Reed, H.S. & Holland, R.H. (1919), Growth of sunflower seeds, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, volume 5, p.140

nom de *modèle logistique de croissance* ou *modèle de Verhulst*, en référence à Pierre-François Verhulst qui le premier a proposé ce modèle de croissance de population en 1838. Comme dans le modèle de Malthus, la vitesse de croissance y est proportionnelle à la taille $f(t)$, mais également à la ressource disponible $K - f(t)$, ce qui introduit un phénomène de saturation.

Dans la suite, on supposera que $f(0) = f_0 < K$.

Questions

1) a) Comme $f(t)$ désigne une taille, c'est une grandeur strictement positive et on peut introduire la fonction auxiliaire g définie par $g(t) = \frac{K}{f(t)}$. Montrer que l'équation différentielle (1) est équivalente à la suivante :

$$g'(t) = -r g(t) + r\,. \tag{2}$$

b) En déduire que l'on a

$$f(t) = \frac{K}{1 + B\exp(-rt)}\,, \tag{3}$$

B étant une constante que l'on exprimera en fonction de K et f_0.

2) Étudier les variations et les bornes de la solution f sur $\mathbf{R}_+$.

Les données publiées par Reed et Holland sont indiquées ci-contre ; les instants $t = t_1,\ t_2, \ldots, t_n$ sont ceux où l'on a mesuré la taille du plant.

Age t_i (jours)	Taille f_i (cm)
7	17,93
14	36,36
21	67,76
28	98,10
35	131,00
42	169,50
49	205,50
56	228,30
63	247,10
70	250,50
77	253,80
84	254,50

3) Proposer à partir de ces données une valeur approchée de K.

Dans la suite, on considèrera que cette valeur approchée est la valeur optimale de K. Dans leur article, Reed et Holland proposent d'introduire la fonction auxiliaire

$$h(t) = \ln \frac{f(t)}{K - f(t)}$$

et de réécrire la solution de (1) sous la forme

$$h(t) = r(t - t^*)\,, \tag{4}$$

la constante t^* étant la valeur de t telle que $f(t) = \frac{K}{2}$.

4) a) Justifier cette approche (on pourra s'interroger sur son bien-fondé et l'intérêt qu'elle présente).
b) Que peut-on dire de plus de t^* ?

5) Reed et Holland proposent de prendre $t^* = 34{,}2$ jours sans expliquer aucunement. Pouvez-vous justifier ce choix ?

On cherche désormais à estimer le taux de croissance r.

6) a) Proposer une méthode pour estimer le paramètre r à partir des valeurs $h(t_i)$. On pourra soit s'appuyer sur la pente de sécantes soit suivre la méthode des auteurs qui consistait à calculer les valeurs $\dfrac{h(t_i)}{t_i - t^*}$.
b) À partir de la méthode choisie, proposer une valeur approchée $\widetilde{r}$ de r.
c) Réaliser une représentation graphique des données expérimentales (t_i, f_i) et du modèle prédictif $(t_i, f(t_i))$. Que peut-on remarquer ?