MATHÉMATIQUES
Devoir surveillé n°2
Durée : 3 heures 30

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les deux problèmes sont indépendants.

PROBLÈME N°1

Notations

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de **dimension 4** dont une base est $\mathscr{B} = \langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4} \rangle$

- Pour tout endomorphisme g de E, son noyau est noté $\operatorname{Ker} g$, son espace Image est noté $\operatorname{Im} g$.
- θ est l'application de E vers E définie par : $\forall \overrightarrow{u} \in E,\ \theta\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{0}$.
- Id est l'application de E vers E définie par : $\forall \overrightarrow{u} \in E,\ \operatorname{Id}\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{u}$.
- Si g est un endomorphisme de E, on définit : $g^n = \underbrace{g \circ g \circ \cdots \circ g}_{n \text{ facteurs}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $g^0 = \operatorname{Id}$.

Partie I

1. Préciser l'espace Image et le noyau de l'application θ.

2. Montrer pour tout endomorphisme f de E les inclusions suivantes :

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{Ker} f & \subset & \operatorname{Ker} f^2 & \subset & \operatorname{Ker} f^3 \\ \operatorname{Im} f & \supset & \operatorname{Im} f^2 & \supset & \operatorname{Im} f^3 \end{array}$$

3. Prouvez pour tout endomorphisme f de E les deux implications suivantes :

$$\left[\ \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Longrightarrow \operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f^3\ \right] \quad \text{et} \quad \left[\ \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 \Longrightarrow \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f^3\ \right]$$

4. **Premier exemple**

Nous nous proposons de construire un endomorphisme de E **de rang 3** dont le noyau $\operatorname{Ker} g$ et l'espace Image $\operatorname{Im} g$ ne sont pas supplémentaires.

(a) Soit g un tel endomorphisme.
Préciser la dimension de $\operatorname{Ker} g$ et démontrer l'inclusion $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Im} g$.

(b) Donner un exemple d'endomorphisme de E de rang 3 dont le noyau $\operatorname{Ker} g$ et l'espace Image $\operatorname{Im} g$ ne sont pas supplémentaires.
Vous préciserez simplement sa matrice dans la base $B = \langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4} \rangle$.

5. **Second exemple**

Nous nous proposons de construire un endomorphisme de E **de rang 1** dont le noyau $\operatorname{Ker} g$ et l'espace Image $\operatorname{Im} g$ ne sont pas supplémentaires.

(a) Soit g un tel endomorphisme.
Préciser la dimension de $\operatorname{Ker} g$ et démontrer l'inclusion $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} g$

(b) Donner un exemple d'endomorphisme de E de rang 1 dont le noyau $\operatorname{Ker} g$ et l'espace Image $\operatorname{Im} g$ ne sont pas supplémentaires.

Vous préciserez simplement sa matrice dans la base $B = \langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4} \rangle$.

Partie II

Dans cette partie, nous supposerons que f est un endomorphisme de E tel que : $f^3 = \theta$ et $f^2 \neq \theta$.

1. Nous nous proposons dans cette question de montrer que le rang de f vaut 2.

(a) Justifiez $\dim \operatorname{Im} f^2 \geqslant 1$ et $\dim \operatorname{Ker} f^2 \leqslant 3$

(b) Montrer que $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$ et que $\operatorname{Ker} f \neq \operatorname{Ker} f^2$

(c) En déduire que $\begin{cases} \dim \operatorname{Im} f^2 = 1 \\ \dim \operatorname{Ker} f = 1 \end{cases}$ ou bien $\begin{cases} \dim \operatorname{Im} f^2 = 1 \\ \dim \operatorname{Ker} f = 2 \end{cases}$ ou bien $\begin{cases} \dim \operatorname{Im} f^2 = 2 \\ \dim \operatorname{Ker} f = 2 \end{cases}$.

(d) Nous supposerons dans cette question $\dim \operatorname{Im} f^2 = 1$ et $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ et considérerons l'application $\Phi : \begin{array}{ccc} \operatorname{Im} f & \longrightarrow & \operatorname{Im} f^2 \\ \overrightarrow{v} & \longmapsto & f\left(\overrightarrow{v}\right) \end{array}$

- Montrer que Φ est linéaire et que $\operatorname{Ker} \Phi \subset \operatorname{Ker} f$.
- Montrer que Φ n'est pas l'application nulle. En déduire la dimension de $\operatorname{Im} \Phi$.
- En déduire à l'aide du théorème du rang la dimension de $\dim \operatorname{Ker} \Phi$.
- En quoi ce résultat est-il contradictoire ?

(e) Nous supposerons dans cette question $\dim \operatorname{Im} f^2 = 2$ et $\dim \operatorname{Ker} f = 2$.
Prouver $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$. Qu'en résulte-t-il ?

(f) Conclure.

2. Soit $\overrightarrow{i}$ un vecteur de E tel que $f^2\left(\overrightarrow{i}\right) \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{\ell}$ un vecteur de $\operatorname{Ker} f$ tel que la famille $\left\langle f^2\left(\overrightarrow{i}\right), \overrightarrow{\ell} \right\rangle$ soit libre.

(a) Justifier l'existence de ces vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{\ell}$.

(b) On pose $\overrightarrow{j} = f\left(\overrightarrow{i}\right)$ et $\overrightarrow{k} = f^2\left(\overrightarrow{i}\right)$.

- Montrer que la famille $\left\langle \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{\ell} \right\rangle$ est une base de E.
- Quelle est la matrice B de f dans cette base $\left\langle \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{\ell} \right\rangle$?

Partie III

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B} = \langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4} \rangle$ est la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -9 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Calculez le carré et le cube de la matrice A.

2. Donner une base des espaces vectoriels $\operatorname{Im} f^2$ et $\operatorname{Ker} f^2$.

3. Donner un vecteur $\overrightarrow{\ell}$ de $\operatorname{Ker} f$, non colinéaire à $f^2\left(\overrightarrow{e_1}\right)$.
Justifier que la famille $\mathscr{B}' = \left\langle \overrightarrow{e_1}, f\left(\overrightarrow{e_1}\right), f^2\left(\overrightarrow{e_1}\right), \overrightarrow{\ell} \right\rangle$ est une base de E.

4. Prélever dans la famille $\left\langle \overrightarrow{e_1}, f\left(\overrightarrow{e_1}\right), f^2\left(\overrightarrow{e_1}\right), \overrightarrow{\ell} \right\rangle$ une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.

5. Donner la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.

6. Combien vaut la matrice $P^{-1}AP$? (*Nota Bene : cette question ne nécessite aucun calcul !*)

PROBLÈME N°2

On note $\mathbb{E}$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On note D l'application définie sur $\mathbb{E}$, et à valeurs dans $\mathbb{E}$, qui à toute fonction f de $\mathbb{E}$ associe $D(f) = f'$, sa dérivée, ainsi que Id l'identité de $\mathbb{E}$, vérifiant $\mathrm{Id}(f) = f$ pour toute application f de $\mathbb{E}$.
Dans la suite du problème α désigne un réel non nul et on note $\mathbb{F}_\alpha$, l'ensemble des fonctions de $\mathbb{E}$ de la forme

$$x \mapsto P(x)e^{\alpha x} + Q(x)e^{-\alpha x}$$

où P et Q sont des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 1. On note Id_α, l'application identique sur $\mathbb{F}_\alpha$.

1. (a) Montrer que $\mathbb{F}_\alpha$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$.

(b) On considère les fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto e^{\alpha x}, \quad f_2 : x \mapsto xe^{\alpha x}, \quad f_3 : x \mapsto e^{-\alpha x}, \quad f_4 : x \mapsto xe^{-\alpha x}$$

Montrer que la famille $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de $\mathbb{F}_\alpha$.

2. On note D_α, la restriction de D à $\mathbb{F}_\alpha$, c'est à dire l'application définie sur $\mathbb{F}_\alpha$, qui à toute fonction f de $\mathbb{F}_\alpha$ associe $D_\alpha(f) = f'$, sa dérivée.

(a) Montrer que D est un endomorphisme de $\mathbb{E}$. Déterminer son noyau et son image.

(b) Montrer que D_α est un endomorphisme de $\mathbb{F}_\alpha$.

(c) Déterminer M_α, la matrice de D_α dans la base $\mathscr{B}$.

(d) Montrer que la matrice M_α est inversible.

3. Soit λ un réel. Déterminer en fonction de λ le rang de l'endomorphisme $D_\alpha^2 - \lambda \mathrm{Id}_\alpha$.

4. (a) Déterminer une base du noyau de $D_\alpha^2 - \alpha^2 \mathrm{Id}_\alpha$ et une base de l'image de $D_\alpha^2 - \alpha^2 \mathrm{Id}_\alpha$.

(b) Déduire de 4.a. que pour tout f de $\mathbb{F}_\alpha$, on a l'égalité :

$$\left(D_\alpha^2 - \alpha^2 \mathrm{Id}_\alpha\right)^2 (f) = 0$$

(c) Montrer que $D_\alpha^4 - 2\alpha^2 D_\alpha^2 + \alpha^4 \mathrm{Id}_\alpha = 0$ et en déduire D_α^{-1}.

5. (a) On se place désormais dans $\mathbb{E}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$y''(x) - \alpha^2 y(x) = 0$$

(b) Déterminer le noyau de $D^2 - \alpha^2 \mathrm{Id}$.

(c) Montrer que pour toute application f appartenant au noyau de $\left(D^2 - \alpha^2 \mathrm{Id}\right)^2$, il existe un couple de réels, (λ_1, λ_3), tel que $(D^2 - \alpha^2 \mathrm{Id})(f) = \lambda_1 f_1 + \lambda_3 f_3$, puis que l'application

$$g = f - \frac{\lambda_1}{2\alpha} f_2 + \frac{\lambda_3}{2\alpha} f_4$$

appartient au noyau de $D^2 - \alpha^2 \mathrm{Id}$. En déduire le noyau de $\left(D^2 - \alpha^2 \mathrm{Id}\right)^2$.

6. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$y^{(4)}(x) - 2\alpha^2 y''(x) + \alpha^4 y(x) = 0$$

où l'on note $y^{(4)}$ la dérivée quatrième de la fonction $x \mapsto y(x)$.

7. Soit $\mathscr{E}$ l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$y^{(4)}(x) - 2y''(x) + y(x) = x^3 - 12x + 2$$

(a) Montrer que $\mathscr{E}$ possède une solution polynomiale et la déterminer. On notera par la suite f_0 cette solution polynomiale.

(b) Soit f une solution de $\mathscr{E}$; montrer que $f - f_0$ est un élément du noyau de $\left(D^2 - \mathrm{Id}\right)^2$ et en déduire l'ensemble des solutions de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}$.