Correction du DM 01

Exercice

On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$P_0 = 2\,, \quad P_1 = X \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad P_{n+1} = XP_n - P_{n-1} \quad (*)$$

1. $\star$ On a $P_2 = XP_1 - P_0 = X^2 - 2$, qui se factorise $P_2 = \left(X + \sqrt{2}\right)\left(X - \sqrt{2}\right)$. P_2 a donc 2 racines simples réelles qui sont $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.
   $\star$ Ensuite, $P_3 = XP_2 - P_1 = X\left(X^2-2\right) - X = X^3 - 3X$. On a $P_3 = X\left(X^2-3\right)$ et sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ est donnée par $P_3 = X(X+\sqrt{3})(X-\sqrt{3})$. P_2 a donc 3 racines simples réelles qui sont $-\sqrt{3}, 0$ et $\sqrt{3}$.
2. On démontre ce résultat par récurrence sur $n \geq 0$.

   NOTE — Le calcul de P_{n+2} nécessitant les deux polynômes précédents P_n et P_{n+1}, il faut faire attention à la formulation de la propriété. Il y en a deux possibles :
   (a) soit l'énoncé de la propriété $\mathcal{Q}(n)$ porte sur les deux polynômes P_n et P_{n+1} à la fois et on fait une récurrence classique (choix fait ici à la question 2.).
   (b) soit l'énoncé de la propriété $\mathcal{Q}(n)$ porte uniquement sur le polynôme P_n, et on fait une récurrence double : double initialisation, puis $\mathcal{Q}(n)$ et $\mathcal{Q}(n+1)$ en HR pour démontrer $\mathcal{Q}(n+2)$ (choix fait à la question 5.).

   On démontre par récurrence sur $n \geq 0$ la propriété $\mathcal{Q}(n)$: « P_n est un polynôme de degré n et P_{n+1} un polynôme de degré $n+1$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $P_n\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = z^n + \dfrac{1}{z^n}$ et $P_{n+1}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = z^{n+1} + \dfrac{1}{z^{n+1}}$ ».
   — (init) $P_0 = 2$ est bien de degré 0 et $P_1 = X$ de degré 1. De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,

   $$P_0\left(z+\frac{1}{z}\right) = 2 = z^0 + \frac{1}{z^0} \quad \text{et} \quad P_1\left(z+\frac{1}{z}\right) = z + \frac{1}{z} = z^1 + \frac{1}{z^1}$$

   Par conséquent, $\mathcal{Q}(0)$ est vérifiée.
   — (héré) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et supposons $\mathcal{Q}(n)$ vraie. Montrons que $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie. Par HR, on sait déjà que P_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $P_{n+1}\left(z+\dfrac{1}{z}\right) = z^{n+1} + \dfrac{1}{z^{n+1}}$. Reste à vérifier pour P_{n+2} en utilisant la relation $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$. Comme $\deg(XP_{n+1}) = 1 + (n+1)$ et $\deg(P_n) = n$ par HR, on a $\deg(P_{n+2}) = \max\left(\deg(XP_{n+1}), \deg(P_n)\right) = n+2$ puisque XP_{n+1} et P_n sont de degrés différents. Ensuite, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,

   $$\begin{aligned} P_{n+2}\left(z+\frac{1}{z}\right) &\underset{\text{d'après } (*)}{=} \left(z+\frac{1}{z}\right)P_{n+1}\left(z+\frac{1}{z}\right) - P_n\left(z+\frac{1}{z}\right) \underset{\text{par HR}}{=} \left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}\right) - \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) \\ &= z^{n+2} + \frac{1}{z^n} + z^n + \frac{1}{z^{n+2}} - \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) = z^{n+2} + \frac{1}{z^{n+2}} \end{aligned}$$

   ce qui était attendu. Finalement, $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.

   D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est un polynôme de degré n vérifiant

   $$\forall\, z \in \mathbb{C}^*\,, \quad P_n\left(z+\frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n} \quad (**)$$

3. Soit $n \geq 1$. On remarque qu'avec la formule d'Euler, $2\cos(\theta) = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = e^{i\theta} + \dfrac{1}{e^{i\theta}}$. Par conséquent, en appliquant $(**)$ pour $z = e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, on a

   $$P_n\left(2\cos(\theta)\right) = P_n\left(e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}}\right) = \left(e^{i\theta}\right)^n + \frac{1}{\left(e^{i\theta}\right)^n}$$

   En utilisant la formule de Moivre et à nouveau la formule d'Euler,

   $$\boxed{\forall\, \theta \in \mathbb{R}\,, \quad P_n\left(2\cos(\theta)\right) = e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2\cos(n\theta)}$$

4. La question précédente va permettre de déterminer les valeurs de $\theta \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $P_n(2\cos(\theta)) = 0$. Or, quand θ décrit $\mathbb{R}$, $2\cos(\theta)$ décrit $[-2,2]$, et donc en résolvant l'équation $P_n(2\cos(\theta)) = 0$, on obtient ainsi toutes les racines de P_n qui sont situées dans $[-2,2]$. En effet, pour tout $x \in [-2,2]$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, et même unique si on choisit $\theta \in [0,\pi]$, tel que $x = 2\cos(\theta)$ (car la fonction $\theta \longmapsto 2\cos(\theta)$ réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-2,2]$).

   NOTE | Le fait de se limiter à $\theta \in [0,\pi]$ évite de retomber ensuite plusieurs fois sur la même valeur $x = 2\cos(\theta)$.

   Résolvons donc $P_n(x) = 0$ pour $x \in [-2,2]$:

$$P_n(x) = 0 \iff \begin{cases} P_n(2\cos(\theta)) = 0 \\ x = 2\cos(\theta) \text{ avec } \theta \in [0,\pi] \end{cases}$$

   Or $P_n(2\cos(\theta)) = 2\cos(n\theta)$ d'après 3., donc

$$P_n(2\cos(\theta)) = 0 \iff \cos(n\theta) = 0 \iff n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \iff \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \ (k \in \mathbb{Z})$$

   Comme $0 \leq \theta \leq \pi$, cela limite les valeurs de k :

$$0 \leq \frac{(2k+1)\pi}{2n} \leq \pi \iff 0 \leq (2k+1) \leq 2n \iff -\frac{1}{2} \leq k \leq n - \frac{1}{2}$$

   ce qui donne $k \in [\![0, n-1]\!]$ puisque k est entier. Par conséquent,

$$P_n(x) = 0 \iff \begin{cases} \theta = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n} \ (k \in [\![0,n-1]\!]) \\ x = 2\cos(\theta) \text{ avec } \theta \in [0,\pi] \end{cases} \iff x = 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \text{ avec } k \in [\![0,n-1]\!]$$

   On obtient ainsi n racines distinctes de P_n dans l'intervalle $[-2,2]$. En effet, les $\theta_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$ avec $k \in [\![0,n-1]\!]$ sont n valeurs distinctes dans $[0,\pi]$, et comme $\theta \longmapsto 2\cos(\theta)$ est bijective (injective suffit) sur $[0,\pi]$, les racines $x_k = 2\cos(\theta_k)$ sont deux à deux distinctes. Il pourrait bien sûr y avoir des racines de P_n en dehors de $[-2,2]$, mais ce n'est pas le cas : comme P_n est de degré n, on les a toutes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n possède n racines, toutes simples, toutes réelles et même situées dans l'intervalle $[-2,2]$: les $x_k = 2\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ avec $k \in [\![0,n-1]\!]$.

   NOTE | Dans les cas $n = 1, n = 2$ et $n = 3$, on retrouve les racines que l'on avait trouvées pour P_1, P_2 et P_3.

5. Il reste à déterminer les coefficients dominants des polynômes P_n pour pouvoir écrire sa factorisation. Aux vues des polynômes P_1, P_2 et P_3, on va démontrer par récurrence que P_n est unitaire (c'est-à-dire avec un coefficient dominant égal à 1). Notons $\mathcal{Q}(n)$ la propriété : « $P_n = X^n + R_n$ avec $\deg(R_n) \leq n-1$ » (formulation pratique à utiliser), que l'on démontre par récurrence double.
   — (double init) $P_1 = X$ et $P_2 = X^2 - 2$, donc $\mathcal{Q}(0)$ et $\mathcal{Q}(1)$ sont vraies.
   — (héré) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons $\mathcal{Q}(n)$ et $\mathcal{Q}(n+1)$ vraies : on écrit $P_n = X^n + R_n$ et $P_{n+1} = X^{n+1} + R_{n+1}$ avec $\deg(R_n) \leq n-1$ et $\deg(R_{n+1}) \leq n$. On a alors

$$P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n = X\left(X^{n+1} + R_{n+1}\right) - (X^n + R_n) = X^{n+2} + \Big(\underbrace{XR_{n+1} - X^n - R_n}_{\text{de degré } \leq n+1}\Big)$$

   donc P_{n+2} est unitaire et $\mathcal{Q}(n+2)$ est vraie.

On obtient donc la factorisation suivante dans $\mathbb{C}[X]$: $$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)$$

Problème

Partie A

Le but de cette partie est d'étudier la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x\,\ln x}{x+1}\ \text{si } x>0 \quad \text{et} \quad f(0)=0$$

1. Comme $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x)=0$ par croissance comparée, on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=0=f(0)$, ce qui prouve que $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est continue en } 0}$. Ensuite,

$$\forall\, x>0\,,\quad \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\ln(x)}{x+1}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}-\infty$$

donc $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 0}$ (mais sa courbe admet une tangente verticale en 0).

2. (a) φ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ comme somme des fonctions ln et $x\longmapsto x+1$ qui sont strictement croissantes. De plus, $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$. Comme φ est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$, et que $0\in\left]\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x),\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)\right[=\mathbb{R}$, $\boxed{\text{l'équation } \varphi(x)=0 \text{ admet une unique solution } \beta}$.
La calculatrice donne $\varphi(0.2)<0$ et $\varphi(0.3)>0$ donc $\boxed{0.2\le\beta\le 0.3}$.

   (b) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall\, x>0\,,\quad f'(x)=\frac{(\ln(x)+1)(x+1)-x\ln(x)}{(x+1)^2}=\frac{\ln(x)+x+1}{(x+1)^2}=\frac{\varphi(x)}{(x+1)^2}$$

Le signe de f' est celui de φ et, compte-tenu de 2.(a), on obtient les variations suivantes pour f :

x	0		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
f	0	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	$+\infty$

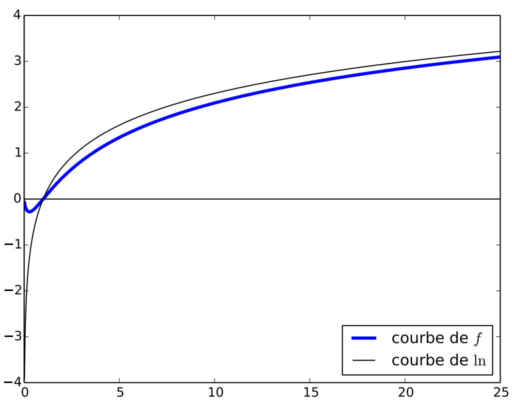
La limite de f en $+\infty$ n'était pas explicitemen demandée. Le détail de son calcul est donné a 3.

3. Comme $x+1\underset{x\to+\infty}{\sim}x$, on a $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\ln(x)$, et donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty}$. Ensuite,

$$\forall\, x>0\,,\quad \ln(x)-f(x)=\ln(x)-\frac{x\ln(x)}{x+1}=\frac{(x+1)\ln(x)-x\ln(x)}{x+1}=\frac{\ln(x)}{x+1}=\frac{\ln(x)}{x}\,\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(x)-f(x))=0}$ par croissance comparée.

4. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(x)-f(x))=0$, la courbe du logarithme est asymptote à celle de f :




```
from matplotlib.pyplot import *
from numpy import linspace, log

figure(1,figsize=(8,6))
clf()
ylim(-4,4)
axhline(color='k')
axvline(color='k')
X=linspace(0.02,25,1000)
plot(X,X*log(X)/(X+1),linewidth=3,color='blue',label='courbe de $f
plot(X,log(X),linewidth=1,color='black',label='courbe de $\ln$')
legend(loc=4)
```

5. On définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$a_0 = 0.2\,,\ b_0 = 0.3 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = b_n & \text{si } \varphi(a_n)\varphi\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) \geq 0 \\ a_{n+1} = a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Ces deux suites sont adjacentes et convergent vers β. Voici le programme :

```
from numpy import linspace , log
from matplotlib.pyplot import *

def fct_phi(x):
    return log(x)+x+1


a=0.2
b=0.3
while b-a>0.001:
    c=(a+b)/2
    if fct_phi(a)*fct_phi(c)>0:
        a=c
    else:
        b=c
print(a,'< beta <', b)
```

L'exécution du programme donne 0.278125 < beta < 0.27890625.

Partie B

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'étude de f faite au A.2.(b), l'équation $f(x) = n$ n'a pas de solution sur $]0,\beta[$ puisque f est à valeurs négatives sur cet intervalle. En revanche, sur $[\beta,+\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante. Comme de plus $n \in [f(\beta), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$ (puisque $f(\beta) < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$), l'équation $f(x) = n$ a une unique solution sur $[\beta,+\infty[$. Au final, $\boxed{\text{l'équation } f(x) = n \text{ admet une solution et une seule, notée } \alpha_n}$.

2. (a) On a bien $f(e^n) = \dfrac{e^n n}{e^n + 1} \leq n$ (car $0 < e^n < e^n + 1$), c'est-à-dire $f(e^n) \leq f(\alpha_n)$. Comme e^n et α_n appartiennent à $[\beta,+\infty[$ et que f est strictement croissante sur cet intervalle, on peut en déduire que les antécédents sont rangés dans le même ordre : $\boxed{e^n \leq \alpha_n}$.

   (b) Comme
   $$\ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right) = \ln(\alpha_n) - \ln(e^n) = \ln(\alpha_n) - n$$
   l'égalité (1) s'écrit $\ln(\alpha_n) - n = \dfrac{n}{\alpha_n}$. On multiplie par $\alpha_n > 0$:
   $$(1) \iff \alpha_n \ln(\alpha_n) - n\alpha_n = n \iff \alpha_n \ln(\alpha_n) = n(\alpha_n + 1) \iff \underbrace{\frac{\alpha_n \ln(\alpha_n)}{\alpha_n + 1}}_{f(\alpha_n)} = n$$

   $$\boxed{\text{conclusion : la relation } f(\alpha_n) = n \text{ peut bien s'écrire sous la forme : } \quad \ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right) = \frac{n}{\alpha_n} \quad \mathbf{(1)}}$$

   (c) Il s'agit de démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha_n}{e^n} = 1$, ce qui revient à démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{\alpha_n}{e^n}\right) = 0$. Pour cela, on utilise **(1)** : comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^n \leq \alpha_n$ d'après 2.(a), on a
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \frac{n}{\alpha_n} \leq \frac{n}{e^n}$$
   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{e^n} = 0$ par croissance comparée, on en déduit par encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\alpha_n} = 0$. Comme expliqué plus haut, on déduit de **(1)** que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{\alpha_n}{e^n}\right) = 1$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha_n}{e^n} = 1$, ce qui signifie que $\boxed{\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n}$.

3. On écrit α_n sous la forme :

$$\alpha_n = e^n\,(1+\varepsilon_n) \quad \text{où} \quad \varepsilon_n \geq 0 \quad \textbf{(2)}$$

NOTE | Par définition de deux suites équivalentes, on peut écrire $\alpha_n = e^n\,(1+\varepsilon_n)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. Comme $\alpha_n \geq e^n$, on a bien également $\varepsilon_n \geq 0$.

(a) D'après **(2)**, on a

$$(1+\varepsilon_n) = \frac{\alpha_n}{e^n} \quad \text{puis} \quad \ln(1+\varepsilon_n) = \ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right) \underset{\text{d'après } \textbf{(1)}}{=} \frac{n}{\alpha_n}$$

Par produit, on a donc

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad (1+\varepsilon_n)\ln(1+\varepsilon_n) = \frac{\alpha_n}{e^n} \times \frac{n}{\alpha_n} = \frac{n}{e^n}}$$

(b) <u>1ère méthode</u> : on fait une étude de fonction pour chacune des inégalités.
On étudie $g_1 : t \longmapsto (1+t)\ln(1+t) - t$ pour montrer l'inégalité de gauche. g_1 est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad g_1'(t) = \ln(1+t) + 1 - 1 = \ln(1+t) \geq 0$$

Ainsi, g_1 est croissante sur $\mathbb{R}_+$, et comme $g_1(0) = 0$, on en déduit que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad g_1(t) \geq 0 \quad \text{soit} \quad 0 \leq (1+t)\ln(1+t) - t$$

Pour l'inégalité de droite, on fait tout passer d'un même côté et on étudie $g_2 : t \longmapsto (1+t)\ln(1+t) - t - \dfrac{t^2}{2}$.
g_2 est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad g_2'(t) = g_1'(t) - t = \ln(1+t) - t \leq 0$$

En effet, c'est une inégalité connue, que l'on peut redémontrer en poussant l'étude : $g_2''(t) = \dfrac{1}{1+t} - 1 = -\dfrac{t}{t+1} \leq 0$, donc g_2' est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $g_2'(0) = 0$, ce qui implique que $g_2' \leq 0$. Ainsi, g_2 est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, et comme $g_2(0) = 0$, on en déduit que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad g_2(t) \leq 0 \quad \text{soit} \quad (1+t)\ln(1+t) - t \leq \frac{t^2}{2}$$

Finalement, on a bien démontré que

$$\boxed{\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq (1+t)\ln(1+t) - t \leq \frac{t^2}{2}}$$

<u>2ème méthode</u> :
On part de l'encadrement classique suivant : pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq \ln(1+u) \leq u$. On prend $t \geq 0$ et on intègre de $u = 0$ à $u = t$ dans cet encadrement :

$$\int_0^t 0 \,\mathrm{d}u \leq \int_0^t \ln(1+u)\,\mathrm{d}u \leq \int_0^t u\,\mathrm{d}u \qquad (\star)$$

Or

$$\int_0^t 0\,\mathrm{d}u = 0, \quad \int_0^t u\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^t = \frac{t^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{t^2}{2}$$

et

$$\int_0^t \ln(1+u)\,\mathrm{d}u = \Big[(1+u)\ln(1+u) - (1+u)\Big]_0^t = (1+t)\ln(1+t) - (1+t) - \big((1+0)\ln(1+0) - (1+0)\big) = (1+t)\ln(1+t) - t$$

donc $(\star)$ donne l'encadrement demandé :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq (1+t)\ln(1+t) - t \leq \frac{t^2}{2}$$

(c) Comme $\varepsilon_n \in \mathbb{R}_+$, on peut appliquer l'inégalité précédente pour $t = \varepsilon_n$:

$$0 \leq (1+\varepsilon_n)\ln(1+\varepsilon_n) - \varepsilon_n \leq \frac{\varepsilon_n^2}{2} \quad \text{d'où} \quad \varepsilon_n \leq (1+\varepsilon_n)\ln(1+\varepsilon_n) \leq \varepsilon_n + \frac{\varepsilon_n^2}{2}$$

Comme d'après 3.(a), on a $(1+\varepsilon_n)\ln(1+\varepsilon_n) = \dfrac{n}{e^n}$, on obtient bien l'encadrement demandé :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,, \quad \varepsilon_n \leq ne^{-n} \leq \varepsilon_n + \frac{\varepsilon_n^2}{2}}$$

En retranchant ε_n, on obtient

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,, \quad 0 \leq ne^{-n} - \varepsilon_n \leq \frac{\varepsilon_n^2}{2} \quad (\star\star)$$

En réutilisant le fait que $\varepsilon_n \leq ne^{-n}$, on a $\dfrac{\varepsilon_n^2}{2} \leq \dfrac{(ne^{-n})^2}{2} = \dfrac{n^2 e^{-2n}}{2}$. Finalement,

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,, \quad 0 \leq ne^{-n} - \varepsilon_n \leq \frac{n^2}{2}\, e^{-2\,n} \quad \mathbf{(3)}}$$

(d) On déduit de **(2)** que $\alpha_n - e^n = e^n \varepsilon_n$. En divisant par ne^{-n} dans **(3)**, on a alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,, \quad 0 \leq 1 - \frac{\varepsilon_n e^n}{n} \leq \frac{ne^{-n}}{2}$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{ne^{-n}}{2} = 0$ par croissance comparée, on déduit du théorème des gendarmes que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\varepsilon_n e^n}{n} = 1$, ce qui signifie que $\varepsilon_n e^n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$. Autrement dit,

$$\boxed{\alpha_n - e^n = e^n \varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n}$$

NOTE — En revenant à la définition d'un équivalent, cela signifie que $\alpha_n - e^n \underset{n\to+\infty}{=} n + o(n)$, soit $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{=} e^n + n + o(n)$. On pourrait continuer le développement asymptotique en écrivant $\alpha_n - e^n = n(1+\varepsilon'_n)$, ...