Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°11 - A rendre le mercredi 22 Janvier 2014

« Matrices cycliques - AGRO 2013 »

Soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$, A appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice A est dite <u>cyclique</u> si et seulement si :

$$\exists\, k \in \mathbb{N}^*\,,\ \mathrm{A}^k = \mathrm{I}_n\,,$$

où I_n désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1) Quelques généralités sur les matrices cycliques.
   Soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$, A une matrice cyclique appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   a) Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et k.
   b) Soit λ une valeur propre de A, montrer que λ est de module 1.
2) Un exemple.
   Considérons la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ -1-\mathrm{i} & -\mathrm{i} & -1-\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} & -2\mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
   a) Déterminer les valeurs propres de A.
      Pour λ appartenant à $\mathbb{C}$, il est conseillé de commencer par l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow L_1+L_2+L_3$ sur la matrice $A-\lambda I_3$ puis de distinguer deux cas selon que $\lambda = -i$ ou $\lambda \neq -i$.
   b) Pour chaque valeur propre de A, déterminer une base du sous-espace propre associé.
   c) Montrer que la matrice A est diagonalisable,
      et donner une matrice P inversible et une matrice D diagonale appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que : $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$.
   d) Montrer qu'il existe un entier naturel non nul k tel que : $\mathrm{D}^k = \mathrm{I}_3$, k sera choisi le plus petit possible.
   e) En déduire que A est cyclique.
3) Réduction d'une matrice cyclique.
   Soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$, A une matrice cyclique appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   Il existe donc k appartenant à $\mathbb{N}^*$ tel que : $\mathrm{A}^k = \mathrm{I}_n$.
   Munissons l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ d'une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$,
   et considérons l'endomorphisme a de $\mathbb{C}^n$ tel que A soit la matrice de a relativement à la base $\mathcal{E}$.
   Et nous noterons id l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini par : $\forall\, \overrightarrow{x} \in \mathbb{C}^n\,,\ id\,(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}$.
   a) Dans cette question, on suppose que : $k = 2$.
      i) Soit λ une valeur propre de A, montrer que : $\lambda \in \{-1, 1\}$.
         Notons : $\mathrm{E}_1 = \mathrm{Ker}(a - id)$, $\mathrm{E}_2 = \mathrm{Ker}(a + id)$.
      ii) Montrer que : $\mathbb{C}^n = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$.
      iii) Supposons dans cette question, qu'aucun des sous-espaces E_1 et E_2 ne soit réduit à $\{\overrightarrow{0}\}$, montrer alors que A est diagonalisable.
      iv) Expliquer pourquoi dans le cas où l'un des espaces E_1 ou E_2 est réduit à $\{\overrightarrow{0}\}$, A est encore diagonalisable.
   b) Dans cette question, on suppose que : $k = 3$.

i) Soit λ une valeur propre de A, montrer que : $\lambda^3 = 1$.
En utilisant l'écriture trigonométrique de λ, montrer que : $\lambda \in \left\{1, \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}, \mathrm{e}^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}}\right\}$.
Dans la suite, nous noterons : $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$.
Calculer j^3 et $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2$.
Notons : $\mathrm{E}_1 = \mathrm{Ker}(a - id)$, $\mathrm{E}_2 = \mathrm{Ker}(a - \mathrm{j}\, id)$ et $\mathrm{E}_3 = \mathrm{Ker}(a - \mathrm{j}^2\, id)$.

ii) Soit $\overrightarrow{x}$ appartenant à $\mathbb{C}^n$, supposons qu'il existe $\overrightarrow{x_1}$ appartenant à E_1, $\overrightarrow{x_2}$ appartenant à E_2, $\overrightarrow{x_3}$ appartenant à E_3 tels que : $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} + \overrightarrow{x_3}$.
Calculer $a\left(\overrightarrow{x}\right)$, $a^2\left(\overrightarrow{x}\right)$,
puis $\overrightarrow{x} + a\left(\overrightarrow{x}\right) + a^2\left(\overrightarrow{x}\right)$, $\overrightarrow{x} + \mathrm{j}\, a\left(\overrightarrow{x}\right) + \mathrm{j}^2\, a^2\left(\overrightarrow{x}\right)$, $\overrightarrow{x} + \mathrm{j}^2\, a\left(\overrightarrow{x}\right) + \mathrm{j}\, a^2\left(\overrightarrow{x}\right)$,
et en déduire une expression de $\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{x_2}$ et $\overrightarrow{x_3}$ en fonction de a et $\overrightarrow{x}$.

iii) Soit $\overrightarrow{x}$ appartenant à $\mathbb{C}^n$, montrer qu'il existe $\overrightarrow{x_1}$ appartenant à E_1, $\overrightarrow{x_2}$ appartenant à E_2, $\overrightarrow{x_3}$ appartenant à E_3 tels que : $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} + \overrightarrow{x_3}$.

iv) En déduire que pour tout vecteur $\overrightarrow{x}$ appartenant à $\mathbb{C}^n$, il existe un unique triplet $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3})$ appartenant à $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \times \mathrm{E}_3$ tel que : $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} + \overrightarrow{x_3}$.

v) Supposons dans cette question, qu'aucun des sous-espaces E_1, E_2 et E_3 ne soit réduit à $\{\overrightarrow{0}\}$, et introduisons $\mathcal{E}_1$ une base de E_1, $\mathcal{E}_2$ une base de E_2, $\mathcal{E}_3$ une base de E_3.
Montrer alors que la juxtaposition des bases $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_3$ forme une base de $\mathbb{C}^n$.
En déduire que A est diagonalisable.

vi) Expliquer pourquoi dans le cas où l'un au moins des espaces E_1, E_2 ou E_3 est réduit à $\{\overrightarrow{0}\}$, A est encore diagonalisable.

Pour information, ce résultat s'étend à toute valeur de k appartenant à $\mathbb{N}^*$. Autrement dit, toute matrice cyclique appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable.