Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°4 - A remettre le lundi 11 octobre 2013

« Envoyez la suite ! »

PROBLEME N°1

Dans tout ce problème, a désigne un nombre réel. On se propose d'étudier les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant une relation de récurrence du type :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\; u_{n+1} = au_n + P(n)$$

où P est un polynôme.
Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est noté indifféremment $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou u.

Partie A : Le cas où P est constant

Dans cette partie, on pose $E_a^{(0)} = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,/\, \exists\, b \in \mathbb{R}\,,\, \forall n \in \mathbb{N}\,,\; u_{n+1} = au_n + b\right\}$.

1. Soit $u \in E_a^{(0)}$. Il existe donc un réel b tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = au_n + b$. Démontrer l'unicité de b. On notera $b = b_u$ pour $u \in E_a^{(0)}$.

2. (a) Déterminer $E_1^{(0)}$.

(b) Déterminer $E_0^{(0)}$.

Dans le reste de cette partie, a est supposé différent de 1.

3. Démontrer que $E_a^{(0)}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

4. Soient $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\; x_n = 1 \quad \text{et} \quad y_n = a^n$$

Démontrer que (x, y) est une famille libre de $E_a^{(0)}$. On précisera les valeurs de b_x et b_y.

5. Soit $u \in E_a^{(0)}$.

(a) Démontrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ unique tel que : $\begin{cases} \lambda x_0 + \mu y_0 = u_0 \\ \lambda x_1 + \mu y_1 = u_1 \end{cases}$.

(b) Montrer que, pour λ et μ définis à la question précédente, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\; u_n = \lambda x_n + \mu y_n$$

(c) Que peut-on conclure ?

6. Calculer la dimension de $E_a^{(0)}$.

Partie B : Le cas où $a \neq 1$

Dans cette partie, on suppose que $a \neq 1$.
On fixe par ailleurs un entier naturel p, et on note $\mathbb{R}_p[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.
Enfin, on pose : $E_a^{(p)} = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,/\, \exists\, P \in \mathbb{R}_p[X]\,,\, \forall n \in \mathbb{N}\,,\; u_{n+1} = au_n + P(n)\right\}$.

1. (a) Démontrer que $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_p[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{p+1} \\ P & \longmapsto & (P(0), P(1), \ldots, P(p)) \end{array}$ est une application linéaire bijective de $\mathbb{R}_p[X]$ sur $\mathbb{R}^{p+1}$.

(b) Soit $u \in E_a^{(p)}$. Il existe donc un polynôme $P \in \mathbb{R}_p[X]$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\; u_{n+1} = au_n + P(n)$$

Déduire de la question précédente l'unicité de P. On notera $P = P_u$ pour $u \in E_a^{(p)}$.

2. Démontrer que $E_a^{(p)}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

3. Prouver que l'application $\theta : \begin{array}{ccc} E_a^{(p)} & \longrightarrow & \mathbb{R}_p[X] \\ u & \longmapsto & P_u \end{array}$ est une application linéaire.

4. Déterminer le noyau de θ.

5. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $Q_k = (X+1)^k - aX^k$.

(a) Quel est le degré de Q_k ?

(b) Démontrer que la famille $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_p)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$.

(c) Démontrer que, pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, Q_k appartient à $\mathrm{Im}(\theta)$.

(d) Conclure que l'application θ est surjective.

6. Déduire des questions précédentes que l'espace $E_a^{(p)}$ est de dimension finie et calculer $\dim\left(E_a^{(p)}\right)$.

7. Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, on pose $x^{(k)}$la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ x_n^{(k)} = n^k$.
On rappelle que y est la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $y_n = a^n$.
Démontrer que la famille $\left(x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(p)}, y\right)$ est une base de $E_a^{(p)}$.

8. *Application :* Déterminer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = 2u_n - 2n + 7 \end{cases}$$

Partie C : Le cas où $a = 1$

1. En adaptant les résultats obtenus à la question précédente, déterminer :

$$E_1^{(p)} = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,/\, \exists\, P \in \mathbb{R}_p[X]\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = u_n + P(n)\right\}$$

2. *Application :* Déterminer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = u_n - 6n + 1 \end{cases}$$