Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°2 - A remettre le lundi 30 septembre 2013

« Plan de solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ! »

EXERCICE

E est l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ; a est un réel strictement positif donné. À toute fonction de E, on associe la fonction $T_a(f)$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ T_a(f)(x) = \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} f(t)\ \mathrm{d}t$$

1. Soit s la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R},\ s(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{a}\right)$. Déterminer $T_a(s)$.

2. Soit f une fonction quelconque de E.

(a) Montrer que $T_a(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que $T_a(f)$ est constante si et seulement si f est périodique de période $2a$.

3. Montrer que l'application T_a est un endomorphisme de E.
Est-il injectif ? Est-il surjectif ?

PROBLEME

1. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ xf'(x) = 3f(x).$$

(a) Démontrer que $\mathcal{S}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(b) Résolution sur l'intervalle $]0, +\infty[$: déterminer l'ensemble S_+ des solutions, sur $]0, +\infty[$, de l'équation différentielle précédente.

(c) Résolution sur l'intervalle $]-\infty, 0[$: déterminer l'ensemble S_- des solutions, sur $]-\infty, 0[$ de l'équation différentielle précédente.

(d) En déduire les solutions de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

(e) On pose $f_+ : x \mapsto \begin{cases} x^3 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ et $f_- : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ x^3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
Représenter f_+ et f_-.
Justifier que la famille (f_+, f_-) est une base de l'espace vectoriel S.

2. $E = \mathbb{R}_3[\mathbb{X}]$. On considère Φ l'application définie sur $\mathbb{R}_3[\mathbb{X}]$ de la façon suivante :

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[\mathbb{X}],\ \Phi(P) = XP' - 3P.$$

(a) Démontrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[\mathbb{X}]$.

(b) Démontrer que $\ker \Phi = \mathrm{Vect}(X^3)$.

(c) Démontrer que $\mathrm{Im}\, \Phi = \mathbb{R}_2[\mathbb{X}]$.

(d) Justifier que l'équation différentielle $xy' - 3y = 2x^2 + x - 1$ admet une unique solution polynomiale de degré inférieur ou égal à deux. *On répondra à cette question sans résoudre l'équation différentielle mais en utilisant les informations sur* $Im\, \Phi$ *et* $\ker \Phi$.

(e) On note $Q = 2X^2 + X - 1$ et P l'unique polynôme de $\mathbb{R}_3[\mathbb{X}]$ tel que $\Phi(P) = Q$. Déterminer P.

3. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : « $xy' - 3y = 2x^2 + x - 1$ ».
Constituent-elles un espace vectoriel ?