Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°15 - A rendre le lundi 18 mars 2013

« Couple gaussien - Equation différentielle - Min-max »

Problème I

La fonction « Couple_Gaussien » dont le script vous est donné ci-dessous génère un couple de variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux la Loi Normale standard $\mathcal{N}(0,1)$.

```
function [X,Y]=Couple_Gaussien
U=rand;V=rand;
C=cos(2*pi*V);S=sin(2*pi*V);
R=sqrt(-2log(U));
X=R*C;Y=R*S;
end
```

Nous nous proposons d'établir dans la suite du devoir cet intéressant résultat.

Soient U une variable aléatoire de loi Uniforme sur $]0,1[$ et V une variable aléatoire de loi Uniforme sur $[0,1]$ définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$

Partie I

Nous nous proposons de déterminer la loi de $R = \sqrt{-2\ln U}$

1. Déterminer la fonction de répartition de R.
2. Montrer que R est une variable aléatoire de densité g vérifiant : $\forall t \geq 0,\ g(t) = t \times \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)$.
3. Montrer que R admet une espérance égale à $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et que R^2 admet une espérance égale à 2.

Partie II

Nous nous proposons de déterminer les lois de $S = \sin(2\pi V)$ et $C = \cos(2\pi V)$

1. Soit t un réel quelconque de l'intervalle $[-1,1]$.
   (a) Représenter sur $[0,1]$ la fonction $\phi : v \mapsto \cos(2\pi v)$
   (b) Faites apparaître sur le schéma les solutions de l'inéquation $\phi(v) \leq t$.
   (c) En déduire : $\forall t \in [-1,1],\ \mathrm{P}(C \leq t) = 1 - \dfrac{1}{\pi}\arccos(t)$.
2. Soit t un réel quelconque de l'intervalle $[-1,1]$.
   (a) Représenter sur $[0,1]$ la fonction $\psi : v \mapsto \sin(2\pi v)$
   (b) Faites apparaître sur le schéma les solutions de l'inéquation $\psi(v) \leq t$.
   (c) En déduire : $\forall t \in [-1,1],\ \mathrm{P}(S \leq t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\arcsin(t)$.
3. Prouver que C et S sont deux variables aléatoires de même densité f vérifiant :

$$\forall t \in\,]-1,+1[\,,\ f(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}}$$

4. Montrer que C et S admettent une espérance commune égale à 0 et une variance commune égale à $\frac{1}{2}$.

Partie III

Soit Z une variable aléatoire définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ admettant une densité h continue sur un intervalle I et nulle en dehors de cet intervalle.

1. Montrer que si h est une fonction paire, alors $|Z|$ est une variable aléatoire admettant pout densité la fonction k définie par :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ k(t) = \begin{cases} 2\,h(t) & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
2. Montrer que si Z est à valeurs strictement positives, alors $\ln Z$ est une variable aléatoire de densité k définie par :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ k(t) = e^t\, h\left(e^t\right)$$
3. Montrer que $\exp(Z)$ est une variable admettant pour densité k définie par :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ k(t) = \begin{cases} \frac{1}{t}\,h(\ln t) & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Partie IV

Dans cette partie, nous admettrons au moment opportun le résultat de cours suivant :

> Pour tout couple (Z_1, Z_2) de variables aléatoires indépendantes de densités respectives f_1 et f_2 la variable $Z = Z_1 + Z_2$ admet une densité f_Z définie par :
> $$\forall z \in \mathbb{R}, \quad f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\, f_2(z-t)\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

On pose $X = RC = \sqrt{-2\ln U}\,\cos(2\pi V)$ et $Y = RS = \sqrt{-2\ln U}\,\sin(2\pi V)$.

1. Indiquez en quoi l'hypothèse d'indépendance de U et V permet de calculer simplement l'espérance et la variance des variables X et Y.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles égales ? Suivent-elles la même loi ?
3. En vous appuyant sur les résultats obtenus dans les parties II et III :
   - Déterminer une densité de $|C| = |\cos(2\pi V)|$.
   - En déduire une densité f_1 de la variable aléatoire $Z_1 = \ln|C|$.
   - Déterminer une densité f_2 de la variable $Z_2 = \ln R = \ln\sqrt{-2\ln U}$.
4. Montrer que la variable aléatoire $Z = Z_1 + Z_2$ admet pour densité la fonction f_Z définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad f_Z(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(z - \frac{1}{2}e^{2z}\right)$$
Vous pourrez pour cela procéder au changement de variable $u = \sqrt{e^{-2t} - 1}$ dans l'intégrale 1 définissant f_Z.
5. Ils ne nous reste que quelques étapes pour déterminer la loi de X
   (a) Exprimez la variable aléatoire $R \times |C|$ en fonction de Z puis en déduire une densité de cette variable que vous exprimerez à l'aide de la densité φ de la Loi Normale Standard.
   (b) En déduire que : $\forall t > 0$, $\mathrm{P}(-t \leq X \leq t) = 2\,\Phi(t) - 1$ où Φ est la fonction de répartition de la Loi Normale Standard.
   (c) Justifier pour tout réel t, l'égalité $\mathrm{P}(X > t) = \mathrm{P}(X < -t)$.
   (d) Conclure quant à la Loi de probabilité de X.
6. A-t-on démontré la totalité du résultat annoncé ?

Problème II

Ce second problème est constitué de deux exercices indépendants

Exercice I

Nous nous proposons de résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle de paramètre α suivante :

$$x^2 y'' + xy' + y = \sin(\alpha \ln x) \qquad (\mathcal{E})$$

Nous rappelons qu'une fonction f est solution sur $]0, +\infty[$ de $(\mathcal{E})$ si : $\forall x > 0,\ x^2 f''(x) + x f'(x) + f(x) = \sin(\alpha \ln x)$.

1. Nous supposerons dans cette question que cette équation admet sur $]0, +\infty[$ une solution f
   On pose g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(t) = f\left(e^t\right)$
   (a) Déterminer g' et g'' en fonction de f' et f''.
   (b) Montrer que g est alors solution d'une équation différentielle $(\mathcal{E}')$ linéaire du second ordre à cœfficients constants.
   (c) Résoudre cette équation différentielle $(\mathcal{E}')$ (Attention aux cas particuliers $\alpha = \pm 1$!).
   (d) Donnez une expression possible des solutions de $(\mathcal{E})$
2. Déterminer les solutions de $(\mathcal{E})$?

Exercice II

Nous admettrons pour traiter cet exercice le théorème suivant :

Théorème : Soit $\mathcal{D}$ un **<u>disque fermé borné</u>** ou un **<u>pavé fermé borné</u>** de $\mathbb{R}^2$:
Si une fonction f de deux variables est continue sur ce **<u>domaine fermé borné D</u>**
- cette fonction f admet alors sur ce **<u>domaine fermé borné D</u>** un minimum.
- cette fonction admet alors sur ce **<u>domaine fermé borné D</u>** un maximum.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$

1. Déterminer les extremums locaux de la fonction $f : (x, y) \longmapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$
2. Déterminer le maximum de f sur $[0, 1]^2$