Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°10 - A remettre le mardi 13 décembre 2011

« Temps d'attente - Le problème du collectionneur »

EXERCICE

On dispose de deux dés équilibrés ; une *partie* consiste à lancer successivement les deux dés.
On note :
- D_1 le résultat du premier dé, D_2 le résultat du second.
- E_1 l'événement : $[D_1 < D_2]$, E_2 l'événement : $[D_1 = D_2]$, E_3 l'événement : $[D_1 > D_2]$.

Lors d'une partie :
- Si l'événement E_1 se produit, le joueur ne marque aucun point.
- Si l'événement E_2 se produit, le joueur marque deux points.
- Si l'événement E_3 se produit, le joueur marque un point.

Étude de parties successives

Pour tout entier naturel $i \geq 1$, on note :
- X_i la variable aléatoire représentant le nombre de points marqués au cours de la $i^{\text{ème}}$ partie.
- Y_i le nombre de points obtenus à l'issue des i premières parties.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements E_1, E_2, E_3.
2. Soit $i \in [\![1, n[\![$, déterminer la loi de X_i puis calculer son espérance et sa variance.
3. Préciser la loi de Y_1 et déterminer celle de Y_2.
4. Nous nous proposons dans cette question de déterminer la loi de Y_3
   a. Préciser $Y_3(\Omega)$.
   b. Faire le tableau de la loi conjointe du couple (Y_2, Y_3).
   c. En déduire la loi de Y_3.
5. Exprimer Y_n en fonction des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
   En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y_n.
6. Combien de parties au minimum le joueur doit-il faire pour que cette espérance dépasse 10 points ?

Étude d'un temps d'attente

À présent, le joueur joue jusqu'à dépasser un nombre de points fixé à l'avance.
On note :
- T_1 : la variable aléatoire égale au nombre de parties nécessaires pour que le total des points atteigne au moins 1 et égale à 0 si ce total n'atteint jamais 1.
- T_2 : la variable aléatoire égale au nombre de parties nécessaires pour que le total des points atteigne au moins 2 et égale à 0 si ce total n'atteint jamais 2.

Par exemple, si le joueur marque 0 – 2 – 1, alors $T_1 = T_2 = 2$; s'il marque 0 – 1 – 2, alors $T_1 = 2$ et $T_2 = 3$.

1. Que vaut $T_1(\Omega)$? Donner la loi de probabilité de T_1 ; en déduire l'espérance et la variance de T_1.
2. Nous nous proposons de déterminer maintenant la loi de T_2
   a. Donner $T_2(\Omega)$ et calculer $P(T_2 = 1)$ et $P(T_2 = 2)$.
   b. Donner une expression générale de $P(T_2 = k)$ pour $k \geq 3$. Est-elle encore valable pour $k = 1$ ou 2 ?
   c. Vérifier que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(T_2 = k) = 1$. Que peut-on en déduire concernant l'événement « Le joueur n'obtient jamais un score cumulé supérieur ou égal à deux. » ?
   d. Calculer l'espérance de T_2.

PROBLÈME

Une urne $\mathcal{U}$ contient r boules numérotées de 1 à r ($r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$). Chaque seconde, on pioche au hasard une des r boules de cette urne, cette boule étant remise instantanément parmi les autres.
L'univers Ω des résultats de cette expérience aléatoire est l'ensemble des suites illimitées d'éléments de $\mathcal{U}$.
- Pour $i \in [\![1, r]\!]$, on note Y_i la variable aléatoire égale au nombre de pioches nécessaires pour obtenir i numéros différents *(on convient que Y_1 est la variable constante égale à 1).*
- X est la variable aléatoire égale au nombre de pioches nécessaires pour obtenir les r numéros *(donc $Y_r = X$).*

Nous admettrons les résultats suivants

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i}\right) - \ln n$ est convergente et $\lim(u_n) = \gamma$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i^2}\right)$ est convergente et $\lim(v_n) = \dfrac{\pi^2}{6}$

Étude de la variable X

Pour tous $k \in [\![1, r]\!]$ et $m \in \mathbb{N}^*$, on considère les événements :
- $A_{k,m}$: « Le numéro k n'a pas été obtenu au cours des m premières pioches ».
- $B_{k,m}$: « k numéros n'ont pas été obtenus au cours des m premières pioches ».

1. Calculer $P(A_{k,m})$ et $P(B_{k,m})$
2. Justifier que $P(X > m) = P(A_{1,m} \cup A_{2,m} \cup \cdots \cup A_{r,m})$.
3. Montrer, en utilisant la formule du crible, que : $P(X > m) = \sum\limits_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \binom{r}{k} \left(1 - \frac{k}{r}\right)^m$.
4. En déduire que X est une variable aléatoire presque sûrement définie sur Ω et préciser sa loi.
5. Soit i un entier quelconque compris entre 1 et r.
   Comparer les événements $[Y_i > n]$ et $[X > n]$. En déduire que Y_i est une variable aléatoire presque sûrement définie sur Ω.

Étude des variables aléatoires $Y_{i+1} - Y_i$

1. **Étude du cas** $r = 3$.
   a. Loi de Y_2.
   - Comparer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les événements $[Y_2 > n]$ et C_n : « Les n premières pioches donnent toutes le même numéro ».
   - Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(C_n)$, puis $P(Y_2 > n)$.
   - En déduire la loi de Y_2

   b. Loi de $Y_3 - Y_2$
   - Justifier que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Y_3 - Y_2 = n) = \sum\limits_{k=2}^{+\infty} P\big([Y_3 = n + k] \cap [Y_2 = k]\big)$.
   - Calculer pour tous entiers $k \geq 2$ et $n \geq 1$: $P\big([Y_3 = n + k] \cap [Y_2 = k]\big)$
   - En déduire la loi de la variable $Y_3 - Y_2$.

Dans toute la suite, nous nous placerons dans le cas $\mathbf{r \geq 2}$ et admettrons le résultat suivant :

Les variables $\mathbf{Y_2 - Y_1,\ Y_3 - Y_2, \ldots, Y_r - Y_{r-1}}$ sont mutuellement indépendantes

2. Soit i un entier naturel quelconque compris entre 1 et $r - 1$.
   a. Déterminer $Y_i(\Omega)$ et $(Y_{i+1} - Y_i)(\Omega)$.
   b. Montrer que : $\forall n \geq 1, \forall k \geq i,\ P_{Y_i = k}\left(Y_{i+1} - Y_i = n\right) = \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{i}{r}\right)$.
   c. En déduire la loi de $Y_{i+1} - Y_i$, puis son espérance et sa variance.
3. Espérance et variance de X.
   a. Justifier que $X = 1 + \sum\limits_{i=1}^{r-1} (Y_{i+1} - Y_i)$; en déduire l'espérance de X.
   b. Vérifier que $V(X) = r^2 \sum\limits_{i=1}^{r} \frac{1}{i^2} - r \sum\limits_{i=1}^{r} \frac{1}{i}$
   c. Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $E(X) \underset{r\to\infty}{=} r \ln r + \alpha\, r + o(r)$ et $V(X) \underset{r\to\infty}{\sim} \beta\, r^2$.